2-Blöcke mit Defektgruppen mit genau drei Involutionen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von René Reichenbach
geboren am 24. 10. 1987 in Weimar

Gutachter:

1. Prof. Dr. Burkhard Külshammer, Jena
2. Prof. Dr. Markus Linckelmann, London
3. PD Dr. Benjamin Sambale, Kaiserslautern

Tag der Abgabe: 19. 02. 2016

Tag der öffentlichen Verteidigung: 26. 05. 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellungstheorie ist ein fundamentales Hilfsmittel zur Untersuchung endlicher Gruppen G. Die Grundidee ist hierbei, die Moduln der Gruppenalgebra $\mathbb{F}G$ für einen Körper $\mathbb{F}$ zu betrachten. Durch geeignete Wahl von $\mathbb{F}$ können damit zahlreiche Aussagen über G selbst gemacht werden. Glaubermans Z^*-Theorem und der Satz von Feit und Thompson (siehe [32] und [28]) sind prominente Beispiele für den Erfolg dieses Vorgehens.

Um die Analyse der Moduln von $\mathbb{F}G$ zu vereinfachen, zerlegt man diese Algebra zuerst in eine direkte Summe von möglichst kleinen Idealen, welche man Blöcke nennt. Man zeigt dann, dass Blöcke selbst wieder Algebren sind. Nun kann man die irreduziblen Moduln von $\mathbb{F}G$ in natürlicher Weise auf die Blöcke aufteilen. Durch Untersuchung der Struktur aller Blöcke von $\mathbb{F}G$ kann somit auf die Modultheorie von $\mathbb{F}G$ selbst geschlossen werden. Ist die Charakteristik von $\mathbb{F}$ kein Teiler der Ordnung von G, so ist jeder Block nach den Sätzen von Maschke und Artin-Wedderburn zu einer vollen Matrixalgebra über einem Schiefkörper isomorph, welcher eine endliche Erweiterung von $\mathbb{F}$ ist. In diesem Fall ist die Struktur der Blöcke und der Gruppenalgebra also recht gut verstanden.

Die modulare Darstellungstheorie, deren Grundlagen von Brauer entwickelt wurden, befasst sich mit dem anderen Fall, in dem die Charakteristik $p \neq 0$ des Körpers die Gruppenordnung teilt. In dieser Situation ist die Struktur von Blöcken ungleich komplizierter und Gegenstand zahlreicher offener Vermutungen (siehe Abschnitt 2). Viele dieser Vermutungen stellen Beziehungen zwischen verschiedenen Invarianten des Blocks her. Die wichtigste dieser Invarianten ist die Defektgruppe D eines Blocks B. Diese ist eine bis auf Konjugation eindeutig bestimmte p-Untergruppe von G. Die Operation von G auf der Defektgruppe kann in einer Kategorie $\mathcal{F}$ codiert werden, welche man als Fusionssystem bezeichnet. Zusammen spiegeln die Defektgruppe und das Fusionssystem die Struktur des Blocks in vielfacher Art wider. Diese Zusammenhänge legen die folgende wichtige Frage nahe:

Was kann man über die Struktur von B sagen, wenn nur D und $\mathcal{F}$ bekannt sind?

Im einfachsten Fall für $\mathcal{F}$ ist das Fusionssystem nilpotent. Nach einem Resultat [64] von Puig ist B dann zu einer Matrixalgebra über der Gruppenalgebra von D isomorph. Der einfachste Fall für D ist der einer zyklischen Defektgruppe. Gegebenenfalls hat B endlichen Darstellungstyp, d.h. es gibt bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Moduln in B. Dadurch ist es Dade in [22] mit Hilfe sogenannter Brauer-Bäume gelungen, die Struktur des Blocks B zu beschreiben. Ist D nicht zyklisch, so besitzt B stets unendlichen Darstellungstyp, was die Beschreibung der Algebra-Struktur des Blocks schwieriger macht. Deswegen begnügt man sich in diesen Fällen gewöhnlich zunächst mit der Berechnung verschiedener numerischer Invarianten des Blocks. Zu diesen gehören die Anzahl $k(B)$ der irreduziblen Charaktere und die Anzahl $l(B)$ der irreduziblen Brauer-Charaktere des Blocks B. Durch Betrachtung der p-Potenzen, welche in den Graden der gewöhnlichen Charaktere von B aufgehen, können den Charakteren weiter Höhen zugeordnet werden. In manchen Fällen können auch Aussagen über die Cartan- und Zerlegungsmatrix des Blocks gemacht werden.

Speziell im Fall $p = 2$ konnten obige Invarianten für einige Defektgruppen bestimmt werden. So hat Brauer 1974 in [8] Diedergruppen als Defektgruppen betrachtet und konnte $k(B)$, $l(B)$ sowie die Höhen der Charaktere berechnen. Zusätzlich konnten einige Informationen zur Zerlegungsmatrix ermittelt werden. Ein Jahr später untersuchte Olsson in [60] mit ähnlichen Methoden verallgemeinerte Quaternionengruppen und Semidiedergruppen. Die Blöcke in diesen beiden Arbeiten sind gerade die, die zahmen Darstellungstyp haben. Unter Verwendung von Auslander-Reiten-Köchern ist es deshalb Erdmann in [25] gelungen, auch die Algebra-Struktur dieser Blöcke zu beschreiben. In [48] hat Külshammer Kranzprodukte $C_{2^n} \wr C_2$ als Defektgruppen untersucht. Dort konnten allerdings nicht in allen Fällen die Blockinvarianten ermittelt werden. In jüngerer Zeit gibt es eine Reihe von Arbeiten von Sambale zu verschiedenen Familien von Defektgruppen. So wurden in [83] und [72] (siehe auch [24, 73]) metazyklische und minimal nichtabelsche Defektgruppen untersucht. Als Verallgemeinerung finden sich in [82, 81] Untersuchungen zu bizyklischen Defektgruppen. In den Arbeiten [76, 75, 77] wurden zyklischen Erweiterungen von Dieder-, verallgemeinerten Quaternionenund Semidiedergruppen als Defektgruppen betrachtet. Speziell für abelsche Defektgruppen gibt es eine Reihe von Arbeiten [40, 50, 23], die zum Teil auch Informationen zur Algebra-Struktur der Blöcke liefern.

Für Primzahlen $p \neq 2$ hat sich die Analyse von Blockinvarianten als komplizierter erwiesen. In [43] untersucht Kiyota Blöcke mit einer elementarabelschen Defektgruppe der Ordnung 9. Bereits für solch eine vergleichsweise kleine Defektgruppe konnten allerdings nicht für alle Fusionssysteme die Blockinvarianten ermittelt werden. Für elementarabelsche Defektgruppen vom Rang 2 finden sich weitere Ergebnisse beispielsweise in [44, 45, 46, 41], wobei dort stets Zusatzforderungen an den Block gestellt werden. Für abelsche Defektgruppen gibt es weitere Ergebnisse [88, 89, 93, 90, 91] von Watanabe. Mit extraspeziellen Defektgruppen behandelt Hendren in [35, 34] eine Familie von nichtabelschen Defektgruppen für ungerades p. In diesen Arbeiten beschränkt er sich vor allem auf die Überprüfung von Brauers $k(B)$-Vermutung $k(B) \leq |D|$ und der Vermutung von Olsson $k_0(B) \leq |D : D'|$. Schließlich untersucht Sambale in [78, 84] Brauers Höhe 0 Vermutung und die Alperin-McKay Vermutung für metazyklische und minimal nichtabelsche Defektgruppen auch für ungerade Primzahlen.

In dieser Dissertation untersuchen wir eine weitere Familie von Defektgruppen im Fall $p = 2$. Für eine Gruppe G nennen wir den maximalen Rang einer elementarabelschen 2-Untergruppe den 2-Rang von G. Erfahrungsgemäß ist die Analyse der Invarianten eines Blocks B mit Defektgruppe D einfacher, wenn D einen kleinen 2-Rang hat. Hat D den 2-Rang 1, so ist D bekanntlich zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Wie oben ausgeführt, ist die Algebra-Struktur von B in beiden Fällen bekannt. Der Fall des 2-Rangs 2 ist bereits wesentlich komplizierter. Es erscheint deshalb sinnvoll, zuerst Blöcke mit Defektgruppen aus interessanten Teilfamilien der 2-Gruppen vom 2-Rang 2 zu betrachten. Ziel dieser Dissertation ist die Untersuchung von Defektgruppen aus der Teilfamilie der 2-Gruppen mit genau drei Involutionen, welche bereits im Ausblick von [71] angeregt wurde. Diese Familie ist interessant, denn jede 2-Gruppe vom 2-Rang 2 besitzt eine maximale Untergruppe mit maximal drei Involutionen.

Wir beginnen in Abschnitt 1 mit der Einführung von Definitionen und Resultaten aus der Gruppen- und Darstellungstheorie, welche wir für unser weiteres Vorgehen benötigen werden. Hierbei werden wir in der Regel auf Beweise verzichten. Zusätzlich erläutern wir einige unserer Methoden und zeigen einige Hilfsresultate. Es wird sich herausstellen, dass für die Analyse einer Defektgruppe D häufig Kenntnisse über Blöcke mit einer Defektgruppe, die eine spezielle Untergruppe oder ein spezieller Quotient von D sind, benötigt werden. Deshalb wird unsere Untersuchung durch den Umstand erschwert, dass die Eigenschaft, maximal drei Involutionen zu haben, nicht unter Quotientenbildung erhalten bleibt. In den Abschnitten 3 und 4 werden wir einige Familien von Defektgruppen untersuchen, welche in späteren Abschnitten als Quotienten auftauchen werden.

In [76, 75, 77] untersucht Sambale Defektgruppen, die ein direktes oder zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe und einer Dieder- oder verallgemeinerten Quaternionengruppe sind. Damit verallgemeinert er [8, 60]. In Abschnitt 3 verallgemeinern wir dies wiederum, indem wir den zyklischen Faktor durch eine beliebige abelsche 2-Gruppe ersetzen. Allerdings können wir hierfür nur Fusionssysteme behandeln, die trivial auf dem abelschen Faktor operieren. Diese Verallgemeinerung wird uns durch die Anwendung der Theorie der Fokalgruppe eines Blocks ermöglicht. Es gelingt uns sogar für Defektgruppen der Form $D_{2^n} \times A$ und $Q_{2^n} \times A$, wobei $n \geq 3$ und A eine abelsche 2-Gruppe ist, die Cartanmatrix bis auf Basiswahl zu bestimmen.

In Abschnitt 4 untersuchen wir Defektgruppen D, die ein direktes Produkt von einer Kleinschen Vierergruppe und einer beliebigen 2-Gruppe P sind. Wiederum schränken wir uns auf die Situation ein, in der durch das Fusionssystem keine Konjugationsklassen von P fusioniert werden. Die einfache Untersuchung des Falls $P = 1$ findet sich in [13]. Den Schlüssel für die Untersuchung des allgemeinen Falls liefert die sogenannte $*$-Konstruktion von Broué und Puig (siehe [18]), welche sich in diesem und den folgenden Abschnitten als äußerst leistungsfähig erweist. Mit ihr konstruiert man zunächst vier verschiedene $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(B))$-Bahnen von Charakteren der Höhe 0. Sind $\chi_1, \ldots, \chi_4$ Repräsentanten dieser Bahnen, so zeigt man anschließend, dass die Abbildung

$$\mathrm{Irr}(P) \times \{\chi_1, \ldots \chi_4\} \to \mathrm{Irr}(B), \qquad (\mu, \chi) \mapsto \mu * \chi$$

eine Bijektion ist. Hiermit ist es nun sehr leicht, numerische Blockinvarianten und sogar die Cartanmatrix bis auf Basiswahl zu berechnen.

Craven und Glesser klassifizieren in [21] alle 2-Gruppen mit genau drei Involutionen und nichttrivialen Automorphismen ungerader Ordnung. Diese Gruppen und Q_8 sind die einzigen Kandidaten für wesentliche Untergruppen einer 2-Gruppe mit genau drei Involutionen. In [67] (siehe auch [68]) haben wir alle saturierten Fusionssysteme auf diesen Gruppen ermittelt. Drei Familien von Blöcken mit solchen Defektgruppen untersuchen wir im Abschnitt 5. Wiederum ist die $*$-Konstruktion ein wesentliches Hilfsmittel zum Verständnis dieser Blöcke.

Unterabschnitt 5.1 behandelt kontrollierte Blöcke mit Defektgruppe D vom Typ X_n oder Y_n. Hierbei ist

$$\begin{aligned} X_n = \langle r,s,t,u :& r^4 = t^{2^{n-4}} = 1, s^2 = r^2, r^{-1}sr = s^{-1}, \\ & u^2 = t^{2^{n-5}}, u^{-1}tu = t^{-1}r^2, [r,t] = [s,t] = [r,u] = [s,u] = 1\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Y_n = \langle r,s,t,u :& r^4 = t^{2^{n-4}} = 1, s^2 = r^2, r^{-1}sr = s^{-1}, \\ & u^2 = r^2t^{2^{n-5}}, u^{-1}tu = t^{-1}, [r,t] = [s,t] = [r,u] = [s,u] = 1\rangle \end{aligned}$$

für ein $n \ge 6$. Das einzige interessante Fusionssystem ist dann $\mathcal{F} = \mathcal{F}_D(D \rtimes C_3)$. Wir beginnen die Berechnung der Blockinvarianten, indem wir die Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ aller B-Elemente (u, b_u) für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ ermitteln. Das ermöglicht uns, für $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere λ und μ von D den Wert des Skalarprodukts $(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G$ zu berechnen. Ist dieser Wert klein genug, so kann auf die Struktur der irreduziblen Summanden von $\lambda * \chi$ bzw. $\mu * \chi$ geschlossen werden. Durch Abwandlung von λ und μ konstruieren wir so aus χ alle weiteren irreduziblen Charaktere von B. Mit Hilfe der Cartanmatrix eines B-Elements (u, b_u) mit $u \in Z(D)$ weisen wir schließlich nach, dass wir tatsächlich alle irreduziblen Charaktere gefunden haben.

In Unterabschnitt 5.2 untersuchen wir Blöcke, deren Defektgruppe D eine 2-Sylowgruppe von $\mathrm{PSU}(3,4)$ ist. Die Gruppe D ist nach [3] neben $C_2 \times C_2$ die einzige Gruppe mit genau drei Involutionen, die als 2-Sylowgruppe einer einfachen Gruppe vom 2-Rang zwei auftauchen kann. Für das Fusionssystem beschränken wir uns auf den Fall $\mathcal{F}_D(D \rtimes C_3)$. Blöcke dieser Art wurden bereits von Bertels in seiner Diplomarbeit [6] analysiert. Hierbei wurde jedoch exzessiv von Computeralgebra Gebrauch gemacht. Unsere Argumentation verzichtet darauf. Unter Verwendung der $*$-Konstruktion werden bis auf Basiswahl alle Möglichkeiten für die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix des Blocks berechnet. Hieraus erhalten wir für die Cartanmatrix im Wesentlichen dieselben Fälle wie in [6]. Wir können allerdings die Zahl der möglichen Zerlegungsmatrizen auf drei reduzieren.

Unterabschnitt 5.3 schließlich behandelt Defektgruppen $D \cong Q_{2^n} \times Q_8$ für ein $n \ge 3$. Hierbei betrachten wir nur Fusionssysteme, welche auf dem zweiten Faktor Q_8 keine Konjugationsklassen fusionieren. Wieder ermitteln wir zuerst alle Beiträge der B-Elemente für Charaktere χ von Höhe 0. Anschließend berechnen wir eine obere Schranke für die Anzahl der irreduziblen Charaktere von B, die Summanden von $\eta_D * \chi$ sind. Hierbei bezeichnen wir mit η_D den regulären Charakter von D. Da diese Abschätzung mit einer unteren Schranke zusammenfällt, können wir die Blockinvarianten ermitteln. Technische Schwierigkeiten bereitet für diese Untersuchung der Umstand, dass nur unzureichende Informationen zu Blöcken verfügbar sind, deren Defektgruppen ein zentrales Produkt $Q_{2^n} * Q_8$ sind. Wir umreißen deshalb am Ende des Abschnitts einen einfacheren Beweisansatz unter Annahme von zusätzlichen Informationen.

Ein wesentlicher Teil von [67] ist die Analyse von saturierten Fusionssystemen $\mathcal{F}$ auf 2-Gruppen D mit genau drei Involutionen und $\mathcal{F}$-wesentlichen Untergruppen vom Typ $C_{2^k} \times Q_8$ für ein $k \ge 1$. Für $k = 1$ konnten mit Hilfe von Jankos Klassifikation [38] alle Möglichkeiten für D und $\mathcal{F}$ konkret ermittelt werden. Für $k \ge 2$ war dies nicht möglich. In diesen Fällen konnten lediglich eine maximale Untergruppe von D und gewisse Informationen zur Einbettung in D gefunden werden.

Damit war es wiederum möglich die saturierten Fusionssysteme auf D zu beschreiben. Abschnitt 6 behandelt Blöcke mit solchen Defektgruppen D im Fall $k = 1$. Die meisten Defektgruppen dieser Art hat Sambale bereits in [77, 81] untersucht. Es verbleibt eine Familie von Defektgruppen, welche wir in Unterabschnitt 6.2 analysieren. Hierbei nutzen wir wieder die $*$-Konstruktion von Broué und Puig. Wir benötigen allerdings Informationen zur Cartanmatrix von Blöcken mit Defektgruppen $D/Z(D)$. Dieser Quotient ist ein semidirektes Produkt $D_{2^n} \rtimes C_4$ für ein $n \geq 3$. Die Berechnung der Cartanmatrix bis auf Basiswahl erfolgt in Unterabschnitt 6.1. Wegen der engen Verwandtschaft dieser Gruppe zu einer Diedergruppe, können wir im Wesentlichen die Argumentation aus Unterabschnitt 3.1 übernehmen. Dies schließt die Untersuchung des Falls $k = 1$ ab.

Im Abschnitt 7 geben wir schließlich einen Ausblick auf weitere mögliche Untersuchungen. Ausgehend von unserer Methode zur Analyse von Blockinvarianten, welche sich in dieser Arbeit als außerordentlich leistungsfähig erwiesen hat, beschreiben wir eine Reihe von weiteren Familien von Defektgruppen und Fusionssystemen, deren Untersuchung in Reichweite zu sein scheint. In diesem Sinn kann der Abschnitt als Anregung für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Blocktheorie dienen.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer Professor Dr. Burkhard Külshammer für die stets kompetente Unterstützung während der Promotionsphase danken. Auch Dr. Benjamin Sambale danke ich für zahlreiche wertvolle Hinweise und interessante Gespräche. Für die Finanzierung meiner Arbeit danke ich dem Freistaat Thüringen, der Carl-Zeiss-Stiftung und dem BMBF-Projekt ProQualität Lehre. Schließlich danke ich dem Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn für die Gastfreundschaft während meines Aufenthalts im März 2014.

1 Grundlagen

In diesem Abschnitt führen wir einige Definitionen und Sätze aus der Gruppen- und Darstellungstheorie ein. Wir werden hierbei auf Beweise verzichten und verweisen stattdessen auf die Standardliteratur [37, 36, 27, 56]. Auch [71, 74] geben gute Einführungen in die Theorie. Zusätzlich beschreiben wir einige Methoden und zeigen Hilfssätze, die für die folgenden Abschnitte von Bedeutung sind. Für Nachschlagzwecke verweisen wir auf das Stichwortverzeichnis am Ende der Arbeit.

Im Folgenden wird G stets eine endliche Gruppe sein. Alle Ringe und Algebren werden ein Einselement besitzen. Unter Moduln werden wir stets endlich erzeugte Linksmoduln verstehen. Die Zahl p wird in diesem Abschnitt stets eine Primzahl sein.

1.1 Gruppen

Wir beginnen mit ein wenig Notation aus der Gruppentheorie:

Definition 1.1. *Für Elemente $x, y \in G$ schreiben wir ${}^xy := xyx^{-1}$ und $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Sind $U, V \leq G$ Untergruppen, so setzen wir analog ${}^xU = xUx^{-1}$ und $[U, V] = \langle [u, v] : u \in U, v \in V\rangle$. Die* Kommutatorgruppe *$[G, G]$ bezeichnen wir auch mit G'. Wiederum analog bezeichnen*

$$ {}^Gx := \{{}^gx : g \in G\} \qquad \text{und} \qquad {}^GU := \{{}^gU : g \in G\} $$

die Bahnen unter den obigen Linksoperationen. Die Menge der Bahnen $\{{}^Gx : x \in G\}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Cl}(G)$. Ist $y \in {}^Gx$, so schreiben wir manchmal $x \sim_G y$.

Definition 1.2. *Die Menge der p-*Elemente *von G bezeichnen wir mit G_p. Analog sei $G_{p'}$ die Menge der p'-*Elemente *bzw. p-*regulären Elemente *von G.*

Wie üblich bezeichnen wir die *Automorphismengruppe* von G mit $\mathrm{Aut}(G)$. Die Untergruppe der durch Konjugation induzierten Automorphismen

$$ \mathrm{Inn}(G) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \exists h \in G \ \forall g \in G : \varphi(g) = hgh^{-1}\} $$

nennen wir *innere Automorphismengruppe*. Der Quotient $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ wird *äußere Automorphismengruppe* genannt. Ist Q eine Untergruppe von G, so liefert Konjugation mit G ebenfalls eine Untergruppe

$$ \mathrm{Aut}_G(Q) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(Q) : \exists g \in G \ \forall q \in Q : \varphi(q) = gqg^{-1}\} $$

der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(Q)$. Ist R eine weitere Untergruppe von G, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(Q, R)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen $Q \to R$. Analog sei $\mathrm{Hom}_G(Q, R)$ die Teilmenge

$$ \mathrm{Hom}_G(Q, R) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(Q, R) : \exists g \in G \ \forall q \in Q : \varphi(q) = gqg^{-1}\} $$

der Gruppenhomomorphismen, die durch Konjugation in G induziert werden.

Definition 1.3. *Es sei U eine Untergruppe von G. Dann bilden die folgenden Mengen ebenfalls Untergruppen von G:*

- *das* Zentrum *$Z(G) := \{g \in G : gh = hg \text{ für } h \in G\}$ von G,*
- *die* Frattini-Untergruppe *$\Phi(G) := \bigcap_{M < G \text{ maximal}} M$ von G,*
- *der* Zentralisator *$C_G(U) := \{g \in G : ug = gu \text{ für } u \in U\}$ von U in G,*
- *der* Normalisator *$N_G(U) := \{g \in G : gUg^{-1} = U\}$ von U in G.*

Ist $U = \langle u\rangle$, so schreibt man für den Zentralisator $C_G(U)$ auch $C_G(u)$.

Abschließend für diesen Unterabschnitt führen wir noch einige häufig benötigte Gruppen ein:

- Die *zyklische Gruppe* mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen bezeichnen wir mit C_n.
- Für $k, n \in \mathbb{N}$ nennt man ein direktes Produkt $C_n^k := C_n \times \ldots \times C_n$ (k Faktoren) isomorpher zyklischer Gruppen eine *homozyklische Gruppe*.
- Für $n \geq 2$ ist die *Diedergruppe* D_{2^n} der Ordnung 2^n durch die Präsentation

  $$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, {}^b a = a^{-1} \rangle$$

  gegeben.
- Die *verallgemeinerte Quaternionengruppe* Q_{2^n} mit 2^n Elementen ist für $n \geq 3$ die Gruppe mit der Präsentation

  $$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = 1, a^{2^{n-2}} = b^2, {}^b a = a^{-1} \rangle.$$

- Für $n \geq 4$ sei SD_{2^n} die *Semidiedergruppe* der Ordnung 2^n mit der Präsentation

  $$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, {}^b a = a^{-1+2^{n-2}} \rangle.$$

1.2 Gruppenalgebren und Blöcke

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Die *Gruppenalgebra RG* ist die Menge aller formalen R-Linearkombinationen der Elemente aus G, d.h.

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \text{ für } g \in G \right\}.$$

Diese Menge wird durch

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \cdot \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{\substack{h,k \in G \\ hk = g}} \alpha_h \beta_k \right) g,$$

$$\lambda \cdot \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} (\lambda \alpha_g) g$$

mit $\alpha_g, \beta_g, \lambda \in R$ für $g \in G$ zu einer R-Algebra. Ziel der Darstellungstheorie ist es, die Struktur der Gruppenalgebra RG zu verstehen. Hierfür benötigen wir zunächst einige Begriffe.

Definition 1.4. *Das* Zentrum *der Gruppenalgebra RG ist*

$$Z(RG) = \{x \in RG : xy = yx \textit{ für } y \in RG\}.$$

Offenbar bildet $Z(RG)$ eine Unteralgebra von RG.

Definition 1.5. *Ein $e \in RG$ mit $e^2 = e$ bezeichnet man als* Idempotent*. Sind e und f Idempotente mit $ef = fe = 0$, so nennt man sie* orthogonal*. Wir nennen ein Idempotent $e \neq 0$* primitiv*, falls für jede Zerlegung $e = f + g$ in orthogonale Idempotente f und g stets $f = 0$ oder $g = 0$ gilt. Die primitiven Idempotente von $Z(RG)$ nennen wir* Blockidempotente.

Man zeigt, dass es nur endlich viele Blockidempotente $e_1, \ldots, e_n$ ($n \in \mathbb{N}$) von RG gibt. Es ergibt sich

$$1 = e_1 + \ldots + e_n.$$

Das Ideal $B_i := RGe_i = e_iRGe_i$ nennt man für $i \in \{1, \ldots, n\}$ *Block* der Gruppenalgebra RG. Man zeigt, das B_i selbst wieder eine R-Algebra mit Einselement e_i ist. Die Menge der Blöcke von RG bezeichnen wir mit $\mathrm{Bl}(RG)$. Analog zur Zerlegung der 1 durch Blockidempotente ergibt sich eine Zerlegung

$$RG = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$$

der Algebra RG in Ideale.

1.3 Klassische Darstellungstheorie

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0, der alle $|G|$-ten Einheitswurzeln enthält. In dieser Situation ist die Gestalt der Blöcke von $\mathbb{K}G$ sehr gut verstanden.

Satz 1.6 (Maschke, Artin-Wedderburn)**.** *Es existieren $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\mathbb{K}G \cong \mathbb{K}^{m_1 \times m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}^{m_n \times m_n}.$$

Alle Blöcke von $\mathbb{K}G$ sind folglich volle Matrixalgebren über $\mathbb{K}$.

In der klassischen Darstellungstheorie zeigt man, dass man jedem Block von $\mathbb{K}G$ eine irreduzible $\mathbb{K}$-Darstellung von G zuordnen kann. Bis auf Äquivalenz gibt es folglich genau n solche Darstellungen. Jeder Darstellung Δ von G ordnet man durch $\chi_\Delta(g) := \mathrm{tr}\,\Delta(g)$ für $g \in G$ weiter einen sogenannten *Charakter* zu. Ist Δ irreduzibel, so nennen wir auch χ_Δ *irreduzibel*. Die Menge der Charaktere zu irreduziblen Darstellungen bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}(G)$, deren Anzahl mit $k(G) := |\mathrm{Irr}(G)|$. Charaktere sind *Klassenfunktionen*, d.h. ihre Werte sind auf Konjugationsklassen von G konstant. Man zeigt sogar, dass $\mathrm{Irr}(G)$ eine $\mathbb{K}$-Basis des Vektorraums der Klassenfunktionen von G bildet. Eine weitere $\mathbb{K}$-Basis ist offenbar durch die *Klassensummen* $C^+ := \sum_{g \in C} g$ für $C \in \mathrm{Cl}(G)$ gegeben. Folglich ist $k(G) = |\mathrm{Cl}(G)|$. Bilden wir hingegen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von irreduziblen Charakteren von G, so ergibt sich der Ring $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)$ der *verallgemeinerten Charaktere* von G.

Ist χ ein Charakter von G, so nennen wir $\deg \chi := \chi(1)$ den *Grad* von χ. Die Menge der irreduziblen Charaktere von G mit Grad $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}_i(G)$. Deren Anzahl bezeichnen wir analog mit $k_i(G)$. Die Charaktere vom Grad 1 nennt man *lineare* Charaktere. Man zeigt, dass diese bezüglich Multiplikation eine abelsche Gruppe bilden. Für $g \in G$ ist durch

$$\eta_G(g) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \deg \chi \cdot \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

speziell der sogenannte *reguläre Charakter* η_G von G definiert. Die folgenden zwei Resultate zu Charaktergraden sind oftmals sehr nützlich.

Satz 1.7. *Es gilt*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (\deg \chi)^2 = |G|.$$

Satz 1.8. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und A eine abelsche Untergruppe von G, so ist $\deg \chi \leq |G : A|$.*

Wir geben nun einige Möglichkeiten zur Konstruktion von Charakteren einer Gruppe aus Charakteren anderer Gruppen an. Ist χ ein Charakter von G und H eine Untergruppe von G, so ist durch $\chi_H(g) := \chi(g)$ für $g \in H$ ein Charakter von H gegeben. Man nennt ihn die *Einschränkung* (Restriktion) von χ. Ist umgekehrt ψ ein Charakter von H, so definiert

$$\psi^G(g) := \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ xgx^{-1} \in H}} \psi(xgx^{-1})$$

für $g \in G$ einen Charakter von G. Diesen nennt man den *induzierten Charakter* von ψ. Ist N normal in G und ist ψ ein Charakter von G/N, so kann ψ auch als Charakter von G aufgefasst werden. Hierbei spricht man von der *Inflation* von ψ. Zwei wichtige Eigenschaften der Inflation sind durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 1.9. *Ist N normal in G und $\psi \in \mathrm{Irr}(G/N)$, so ist die Inflation von ψ nach G ebenfalls irreduzibel. Speziell für $N = G'$ ergeben sich so alle linearen Charaktere von G.*

Deshalb werden wir in dieser Situation die Menge $\mathrm{Irr}(G/N)$ mit der Teilmenge von $\mathrm{Irr}(G)$, welche sich durch Inflation aller Charaktere in $\mathrm{Irr}(G/N)$ ergibt, identifizieren.

Abschließend beschreiben wir eine Möglichkeit zur Zerlegung von verallgemeinerten Charakteren von G in ihre irreduziblen Summanden. Da $\mathbb{K}$ die Charakteristik 0 hat, können wir von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ ausgehen. Ist nun ζ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel, so zeigt man, dass $\chi(g)$ für jeden verallgemeinerten Charakter χ und $g \in G$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ liegt. Wir können also $\chi(g) \in \mathbb{C}$ annehmen. Für verallgemeinerte Charaktere χ und ψ von G, definiert man nun eine Sesquilinearform

$$(\chi, \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Hierbei bezeichnet $\overline{\cdot}$ die komplexe Konjugation. Für die Analyse der irreduziblen Summanden eines verallgemeinerten Charakters können nun die folgenden *Orthogonalitätsrelationen* verwendet werden.

Satz 1.10 (Orthogonalitätsrelationen)**.** *Sind $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$, so gilt*

$$(\chi, \psi)_G = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi = \psi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass wir eine weitgehend identische Theorie erhalten, solange die Charakteristik des Körpers $\mathbb{K}$ nicht die Ordnung der Gruppe G teilt.

1.4 p-modulare Systeme

Wir versuchen nun, unser Verständnis der klassischen Darstellungstheorie auf den sogenannten modularen Fall auszudehnen. In diesem Fall ist die Charakteristik p des Körpers ein Teiler von $|G|$. Hierfür führen wir das Konzept des p-modularen Systems ein.

Es sei $\mathbb{K}$ wieder ein Körper der Charakteristik 0. Weiter sei eine *exponentielle Bewertung*

$$\nu : \mathbb{K}^\times \to \mathbb{R}$$

auf $\mathbb{K}$ gegeben, d.h. für ν gelten:

(i) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ für $a, b \in \mathbb{K}^\times$,

(ii) $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$ für $a, b \in \mathbb{K}^\times$ mit $a + b \in \mathbb{K}^\times$.

Zusätzlich setzen wir $\nu(0) := \infty$. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass ν ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist dann $\operatorname{im}\nu \cong \mathbb{Z}$, so nennen wir die Bewertung ν *diskret*. Im folgenden Lemma sind einige weitere wichtige Eigenschaften von Bewertungen gegeben.

Lemma 1.11. *Für alle $a, b \in \mathbb{K}^\times$ gilt:*

(i) $\nu(-a) = \nu(a)$,

(ii) $\nu(a^{-1}) = -\nu(a)$ *und insbesondere* $\nu(1) = 0$,

(iii) $\nu(a) < \nu(b)$ *impliziert* $\nu(a + b) = \nu(a)$.

Wählen wir eine reelle Zahl $0 < \gamma < 1$, so definiert $d(a,b) := \gamma^{\nu(a-b)}$ für $a, b \in \mathbb{K}$ eine Metrik auf $\mathbb{K}$. Hierbei setzen wir $\gamma^{\nu(0)} = \gamma^{\infty} := 0$. Die durch die Metrik d induzierte Topologie auf $\mathbb{K}$ ist von der Wahl des Parameters γ unabhängig.

Die Menge $\mathcal{O} := \{a \in \mathbb{K} : \nu(a) \geq 0\}$ ist ein Teilring von $\mathbb{K}$. Man bezeichnet ihn als *Bewertungsring* von $\mathbb{K}$. Man zeigt, dass der Quotientenkörper von $\mathcal{O}$ isomorph zu $\mathbb{K}$ ist. Ist die Bewertung ν diskret, so ist $\mathcal{O}$ ein lokaler Hauptidealring. Das eindeutige maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist gegebenenfalls das *Bewertungsideal* $I := \{a \in K : \nu(a) > 0\}$. Es besteht bekanntlich aus allen nichtinvertierbaren Elementen. Da $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring ist, existiert ein $\pi \in \mathcal{O}$ mit $I = (\pi)$. Der Quotient $\mathbb{F} := \mathcal{O}/(\pi)$ ist dann ein Körper.

Durch geeignete Wahl von $\mathbb{K}$ kann man für das Tripel $(\mathbb{K}, \mathcal{O}, \mathbb{F})$ die folgenden Eigenschaften erreichen, welche ein *p-modulares System* definieren:

(i) $\mathbb{K}$ ist ein (topologisch) vollständiger Körper der Charakteristik 0 mit diskreter Bewertung ν,

(ii) $\mathcal{O}$ ist der Bewertungsring von ν mit Quotientenkörper $\mathbb{K}$,

(iii) $\mathbb{F} = \mathcal{O}/(\pi)$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p.

In dieser Situation kann durch Adjunktion erreicht werden, dass $\mathbb{K}$ bestimmte Einheitswurzeln enthält. Für Anwendungen werden wir später häufig benötigen, dass $\mathbb{K}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel enthält. Das werden wir deshalb von nun an stets annehmen.

Durch ein p-modulares System können wir die Blockstrukturen von $\mathbb{K}G$, $\mathcal{O}G$ und $\mathbb{F}G$ miteinander in Verbindung bringen. Wir setzen für $a \in \mathcal{O}$ stets $\overline{a} := a + (\pi) \in \mathbb{F}$. Setzen wir weiter

$$\overline{\sum_{g \in G} \alpha_g g} := \sum_{g \in G} \overline{\alpha_g} g \in \mathbb{F}G$$

für $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathcal{O}G$, so erhalten wir das folgende Resultat.

Satz 1.12. *Die kanonische Projektion $\mathcal{O}G \to \mathbb{F}G$, $x \mapsto \overline{x}$ induziert eine Bijektion zwischen den Blöcken von $\mathcal{O}G$ und $\mathbb{F}G$.*

Die Blockstruktur von $\mathcal{O}G$ ist folglich eng mit der Blockstruktur von $\mathbb{F}G$ verwandt. Ist ein p-modulares System für G fixiert, so nennt man deshalb Blöcke von $\mathcal{O}G$ (oder $\mathbb{F}G$) auch einfach *(p-)Blöcke* von G. In den folgenden Unterabschnitten werden wir einige Zusammenhänge zwischen den Blockstrukturen von $\mathcal{O}G$ und $\mathbb{K}G$ kennenlernen. Die Blockstruktur von $\mathbb{K}G$ ist schließlich aus Satz 1.6 bekannt.

1.5 Defektgruppen und Charaktere von Blöcken

In diesem und allen folgenden Abschnitten sei $(\mathbb{K}, \mathcal{O}, \mathbb{F})$ stets ein p-modulares System für die Gruppe G. Ist B ein p-Block von G, so kann der Grad der Abweichung des Blocks B von einer einfachen Algebra durch die Defektgruppe des Blocks beschrieben werden. Die Struktur der Defektgruppe hängt in vielfacher Art mit der Struktur des Blocks zusammen. Diese Beziehung ist auch Inhalt mehrerer Vermutungen, welche wir im Abschnitt 2 behandeln werden.

Definition 1.13. *Ist Q eine p-Untergruppe von G, so nennen wir die Projektion*

$$\mathrm{Br}_Q : Z(\mathbb{F}G) \to Z(\mathbb{F}C_G(Q)), \qquad \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \alpha_g g$$

Brauer-Homomorphismus *bezüglich Q.*

Definition 1.14. *Ist B ein Block von $\mathbb{F}G$ mit Blockidempotent e_B, so nennen wir eine maximale p-Untergruppe $D \leq G$ mit $\mathrm{Br}_D(e_B) \neq 0$ eine* Defektgruppe *von B.*

Die Defektgruppe D des Blocks B ist bis auf Konjugation eindeutig bestimmt. Die Zahl $d \in \mathbb{N}_0$ mit $|D| = p^d$ nennen wir *Defekt* von B.

Wir ordnen nun die irreduziblen Charaktere den p-Blöcken von G zu. Hierfür nutzen wir sogenannte zentrale Charaktere.

Proposition 1.15. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, so ist die Abbildung*

$$\omega_\chi : Z(\mathbb{F}G) \to \mathbb{F}, \qquad \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \left(\sum_{g \in G} \alpha_g \frac{\chi(g)}{\chi(1)} \right) + (\pi)$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{F}$-Algebren. Werten wir ω_χ in den Blockidempotenten e_B aus, so existiert genau ein Block B mit $\omega_\chi(e_B) = 1$. In diesem Fall sagen wir, dass χ zum Block B gehört, und nennen $\omega_B := \omega_\chi$ den zentralen Charakter *von B.*

Definition 1.16. *Die Menge der irreduziblen Charaktere, die zum Block B gehören, bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}(B)$. Deren Anzahl nennen wir $k(B)$.*

Eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von irreduziblen Charakteren von B nennen wir einen *verallgemeinerten Charakter von B*. Deren Menge bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(B)$. Ist P nun eine p-Sylowgruppe von G und D eine Defektgruppe eines Blocks B mit $D \leq P$, so existiert für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ stets ein $h(\chi) \in \mathbb{N}_0$ mit $|P : D|p^{h(\chi)} \mid \chi(1)$ aber $|P : D|p^{h(\chi)+1} \nmid \chi(1)$. Die Zahl $h(\chi)$ nennt man dann die *Höhe* von χ. Man zeigt, dass stets ein Charakter von Höhe 0 existiert, der zum Block B gehört.

Definition 1.17. *Die Menge der Charaktere von Höhe $i \in \mathbb{N}_0$ in $\mathrm{Irr}(B)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}_i(B)$, deren Anzahl mit $k_i(B)$.*

Wir können auch die irreduziblen $\mathbb{F}$-Darstellungen von G den Blöcken zuordnen. Sei hierfür $|G| = p^k r$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \nmid r$. Man kann zeigen, dass dann für jede r-te Einheitswurzel $\lambda \in \mathbb{F}$ genau eine r-te Einheitswurzel $\widehat{\lambda} \in \mathcal{O}$ mit $\lambda = \widehat{\lambda} + (\pi)$ existiert. Ist nun $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ eine $\mathbb{F}$-Darstellung von G, so ist $\Delta(g)^r = \Delta(g^r) = \Delta(1) = 1$ für $g \in G_{p'}$. Die Eigenwerte von $\Delta(g)$ sind folglich r-te Einheitswurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und es gilt

$$\mathrm{tr}\,\Delta(g) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Wir definieren dann den *Brauer-Charakter* $\varphi_\Delta : G_{p'} \to \mathcal{O}$ durch

$$\varphi_\Delta(g) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\lambda_i}.$$

Ist Δ irreduzibel, so nennt man auch φ_Δ einen *irreduziblen Brauer-Charakter* von G.

Definition 1.18. *Die Menge der irreduziblen Brauer-Charaktere von G bezeichnen wir mit $\mathrm{IBr}(G)$. Deren Anzahl sei $l(G)$.*

Bekanntlich ist dann $l(G)$ gerade die Anzahl der Konjugationsklassen p-regulärer Elemente von G. Bezeichnen wir mit M den einfachen Modul von $\mathbb{F}G$, der zu Δ gehört, so existiert ein eindeutiger Block B von $\mathbb{F}G$ mit $B \cdot M = M$. Wir sagen dann, dass φ_Δ zu B gehört.

Definition 1.19. *Die Menge der irreduziblen Brauer-Charaktere, die zum Block B gehören, bezeichnen wir mit $\mathrm{IBr}(B)$. Deren Anzahl nennen wir $l(B)$.*

Man zeigt, dass stets $l(B) \geq 1$ ist. Wie für gewöhnliche Charaktere bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$ die Menge der $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von irreduziblen Brauer-Charakteren von B.

1.6 Zerlegungs- und Cartanmatrizen

Die Zerlegungsmatrix stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen den irreduziblen Charakteren und den irreduziblen Brauer-Charakteren eines Blocks dar. Im Folgenden sei ζ_n für $n \in \mathbb{N}$ stets eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}$.

Proposition 1.20. *Ist $u \in G_p$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, so existieren für $\varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(u))$ ganz algebraische Zahlen $d^u_\varphi(\chi) \in \mathbb{Z}[\zeta_{\mathrm{ord}(u)}] \subseteq \mathcal{O}$, sodass*

$$\chi(us) = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(u))} d^u_\varphi(\chi)\varphi(s)$$

für $s \in C_G(u)_{p'}$ gilt.

Definition 1.21. *Die Zahlen $d^u_\varphi(\chi)$ nennen wir* verallgemeinerte Zerlegungszahlen *von $\mathbb{F}G$. Ist $u = 1$ so sprechen wir von* gewöhnlichen Zerlegungszahlen*.*

Wir ordnen die Zerlegungszahlen nun in einer Matrix an. Seien hierfür $1 = u_1, u_2, \ldots, u_r$ ($r \in \mathbb{N}$) Repräsentanten der Konjugationsklassen von p-Elementen in G. Dann kann man die Matrix $Q = (d^{u_i}_\varphi(\chi))$ konstruieren, indem man in jeder Zeile $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ festhält und $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $\varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(u_i))$ laufen lässt. Man zeigt, dass Q eine $k(G) \times k(G)$-Matrix ist, und nennt Q die *verallgemeinerte Zerlegungsmatrix* von $\mathbb{F}G$. Analog definiert man die *gewöhnliche Zerlegungsmatrix* als Teilmatrix für $u_1 = 1$. Diese ist eine $k(G) \times l(G)$-Matrix.

Wir ordnen nun die gewöhnliche Zerlegungsmatrix gemäß der Blockstruktur von $\mathbb{F}G$ an. Hierfür sortieren wir $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ gemäß ihrer Zugehörigkeit zu den Blöcken $B_1, \ldots, B_n$ von $\mathbb{F}G$ und erhalten die Gestalt

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_n \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist Q_i für $1 \leq i \leq n$ eine $k(B_i) \times l(B_i)$-Matrix. Man nennt sie die *gewöhnliche Zerlegungsmatrix* von B_i. Nun können wir den Begriff der Cartanmatrix definieren.

Definition 1.22. *Wir nennen die $l(G) \times l(G)$-Matrix $Q^T Q$* Cartanmatrix *von $\mathbb{F}G$. Die $l(B_i) \times l(B_i)$-Matrix $C_{B_i} := Q_i^T Q_i = (c_{\varphi\psi})_{\varphi,\psi \in \mathrm{IBr}(B_i)}$ nennen wir* Cartanmatrix von B_i*.*

Wir wollen nun auch die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix auf eine Blockgestalt bringen. Hierfür führen wir den Begriff der Brauer-Korrespondenz ein. Diese setzt Blöcke von $\mathbb{F}G$ mit Blöcken von $\mathbb{F}H$ für Untergruppen H von G in Beziehung.

Definition 1.23. *Sind B und b Blöcke von $\mathbb{F}G$ bzw. $\mathbb{F}H$ für $H \leq G$, so sagen wir, dass b ein* Brauer-Korrespondent *von B ist (und umgekehrt), wenn*

$$\omega_B\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \omega_b\left(\sum_{g \in H} \alpha_g g\right)$$

für $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in Z(\mathbb{F}G)$ gilt. Wir schreiben dann $B = b^G$.

Ist E eine Defektgruppe von b oben, so existiert eine Defektgruppe D von B mit $E \leq D$. Ist $C_G(E) \leq H$, so existiert stets genau ein Block B von $\mathbb{F}G$ mit $b^G = B$. Brauers erster Hauptsatz gibt eine Bijektion zwischen Blöcken von $\mathbb{F}G$ und $\mathbb{F}H$ in einer speziellen Situation.

Satz 1.24 (Brauers erster Hauptsatz)**.** *Ist $D \leq G$ eine p-Untergruppe und $H \leq G$ mit $N_G(D) \leq H$, so liefert die Brauer-Korrespondenz eine Bijektion zwischen der Menge der Blöcke von $\mathbb{F}G$ mit Defektgruppe D und der Menge der Blöcke von $\mathbb{F}H$ mit Defektgruppe D.*

Brauers zweiter Hauptsatz liefert uns die gewünschte Blockgestalt der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix.

Satz 1.25 (Brauers zweiter Hauptsatz). *Es sei B ein p-Block von G, $u \in G_p$, $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und $\varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(u))$. Gehört dann φ zum p-Block b von $C_G(u)$, so verschwindet $d^u_\varphi(\chi)$ falls $b^G \neq B$.*

Es ist zu bemerken, dass b in der obigen Situation stets einen Brauer-Korrespondenten in G besitzt.

Für den Rest des Grundlagen-Abschnitts fixieren wir einen Block B von $\mathbb{F}G$. Schränken wir die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von G jeweils so ein, dass die Zeilen nur noch über die Elemente von $\mathrm{Irr}(B)$ und die Spalten für $u_1, \ldots, u_r$ jeweils nur über die Brauer-Charaktere der Brauer-Korrespondenten b_{u_i} von B in $C_G(u_i)$ laufen, so ergibt sich die *verallgemeinerte Zerlegungsmatrix* von B. Diese ist eine $k(B) \times k(B)$-Matrix. Schränken wir uns bei dieser Definition auf einen Repräsentanten u_i ein, so ergibt sich die Teilmatrix d^{u_i}. Für $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_{u_i})$ können wir uns weiter auf die Spalte $d^{u_i}_\varphi$, die zu φ gehört, einschränken. Schließlich können wir d^{u_i} und $d^{u_i}_\varphi$ an einer Stelle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ auswerten und erhalten die Zeile $d^{u_i}(\chi)$ und die Zerlegungszahl $d^{u_i}_\varphi(\chi)$. Durch lineare Fortsetzung können wir $d^{u_i}(\chi)$ und $d^{u_i}_\varphi(\chi)$ auch für verallgemeinerte Charaktere χ von B definieren.

Orthogonalitätsrelationen liefern ein essentielles Werkzeug zur Untersuchung der Zerlegungsmatrix eines Blocks.

Satz 1.26. *Es sei $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der G-Konjugationsklassen von p-Elementen in G. Sind dann $u, v \in \mathcal{R}$, b_u und b_v Blöcke von $C_G(u)$ bzw. $C_G(v)$, und $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$ sowie $\psi \in \mathrm{IBr}(b_v)$, so gilt*

$$(d^u_\varphi, d^v_\psi) := \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} d^u_\varphi(\chi)\overline{d^v_\psi(\chi)} = \begin{cases} c_{\varphi\psi} & \text{falls } u = v, b_u = b_v \text{ und } b_u^G = B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $c_{\varphi\psi}$ der entsprechende Eintrag der Cartanmatrix von b_u.

Häufig ist es sehr kompliziert, die Zerlegungsmatrix d^u für $u \in G_p$ exakt zu bestimmen. Ist b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(u)$, so ist es einfacher, die Rolle von $\mathrm{IBr}(b_u)$ in der Definition der verallgemeinerten Zerlegungszahlen durch eine andere $\mathbb{Z}$-Basis I von $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$ zu ersetzen. Solch ein Basiswechsel kann durch eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(l(b_u), \mathbb{Z})$ beschrieben werden. Die Matrix d^u geht unter diesem Basiswechsel in die Matrix $d^u S$ über. Die Cartanmatrix C_{b_u} von b_u geht in die Matrix $S^T C_{b_u} S$ über. Solche Matrizen sind leichter zu ermitteln, weshalb wir im Folgenden häufig auch die modifizierten Matrizen als Zerlegungsmatrix bzw. Cartanmatrix bezeichnen werden und auch die entsprechende Notation dafür verwenden. Häufig werden wir auch die Basis I mit $\mathrm{IBr}(b_u)$ bezeichnen. Tun wir dies, so weisen wir darauf hin, indem wir von Zerlegungs- und Cartanmatrizen bis auf eine ($\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-) *Basiswahl* reden. Durch Betrachtung von Matrizen relativ zu einer solchen Basis verändern sich keine der untersuchten Eigenschaften. Die Betrachtung dieser Basen ist eine Idee, die auf Brauer in [12, Section V] zurückgeht und dort 'basic sets' genannt wird.

1.7 Dominierte Blöcke

Nachdem es mit der Brauer-Korrespondenz gelungen ist, eine Beziehung zwischen Blöcken von G und Blöcken von Untergruppen herzustellen, liefert die Dominanz von Blöcken eine Verbindung zu Quotienten.

Definition 1.27. *Ist $N \trianglelefteq G$, so ist das Bild des Blocks B unter der kanonischen Projektion $\mathcal{O}G \to \mathcal{O}[G/N]$ eine (möglicherweise triviale) Summe von Blöcken von G/N. Für jeden dieser Blöcke $\overline{B}$ sagen wir, dass B den Block $\overline{B}$* dominiert.

In einer speziellen Situation liefert die Dominanz eine Bijektion.

Satz 1.28. *Ist N ein p-Normalteiler von G und $G/C_G(N)$ eine p-Gruppe, so dominiert jeder Block B von G genau einen Block $\overline{B}$ von G/N. Die Abbildung $B \mapsto \overline{B}$ liefert dann eine Bijektion zwischen $\mathrm{Bl}(\mathcal{O}G)$ und $\mathrm{Bl}(\mathcal{O}[G/N])$. Ist dabei D eine Defektgruppe von B, so ist D/N eine Defektgruppe von $\overline{B}$. Weiter ist $C_B = |N| C_{\overline{B}}$, d.h. insbesondere $l(B) = l(\overline{B})$.*

Wir beschreiben eine Situation, in der wir obigen Satz häufig anwenden werden: Ist Q eine p-Untergruppe von G, so sind Q und $C_G(Q)$ normal in $QC_G(Q)$ und der Quotient

$$QC_G(Q)/C_{QC_G(Q)}(Q) = QC_G(Q)/C_G(Q) \cong Q/(Q \cap C_G(Q))$$

ist eine p-Gruppe. Folglich liefert die Dominanz von Blöcken eine Bijektion zwischen den Blöcken von $\mathcal{O}QC_G(Q)$ und $\mathcal{O}[QC_G(Q)/Q]$.

1.8 Fusionssysteme

Viele Eigenschaften einer Gruppe G lassen sich an der Struktur einer p-Sylowgruppe und an deren Einbettung in G ablesen. Ebenso wird die Struktur eines p-Blocks B von G durch die Struktur einer Defektgruppe von B und deren Einbettung in G beeinflusst. Zur Untersuchung beider Konzepte kann man Fusionssysteme nutzen. Diese wurden in [63] erstmals als Frobenius-Kategorien eingeführt. Eine modernere Betrachtung findet sich in [20, 5].

Definition 1.29. *Es sei P eine endliche p-Gruppe. Ein* Fusionssystem *$\mathcal{F}$ auf P ist eine Kategorie, wobei die Objekte durch die Untergruppen von P gegeben sind. Für $Q, R \le P$ ist die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R)$ eine Menge von injektiven Gruppenhomomorphismen $Q \to R$. Die Verknüpfung der Morphismen ist die übliche Komposition von Abbildungen. Zusätzlich muss $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R)$ für $Q, R \le P$ den folgenden Axiomen genügen:*

(i) Für jedes $g \in P$ mit $gQg^{-1} \le R$ liegt die Konjugationsabbildung $Q \to R$, $q \mapsto gqg^{-1}$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R)$.

(ii) Für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R)$ ist der induzierte Gruppenisomorphismus $Q \to \varphi(Q)$ ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, \varphi(Q))$.

(iii) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R)$ ein Gruppenisomorphismus, so ist sein Inverses $\varphi^{-1} : R \to Q$ ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(R, Q)$.

Ist hierbei $Q \to R$ ein Isomorphismus in $\mathcal{F}$, so sagen wir, dass Q und R *in $\mathcal{F}$ konjugiert* sind. Analog sagen wir, dass $x, y \in P$ *$\mathcal{F}$-konjugiert* sind, wenn es einen Morphismus $\varphi : Q \to R$ mit $\varphi(x) = y$ gibt. Sind $x, y \in P$ in $\mathcal{F}$ konjugiert, so schreiben wir $x \sim_{\mathcal{F}} y$. Wie in der Gruppentheorie definieren wir auch *$\mathcal{F}$-Konjugationsklassen* von Untergruppen bzw. Elementen von P. Die Gruppe der $\mathcal{F}$-Automorphismen von Q bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$. Wie für Gruppen setzen wir $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q) := \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)/\mathrm{Inn}(Q)$.

Für ein Fusionssystem $\mathcal{F}$ auf einer p-Gruppe P und einen Isomorphismus $\varphi : Q \to R$ in $\mathcal{F}$ sei

$$N_\varphi := \{g \in N_P(Q) : \exists h \in N_P(R) \forall q \in Q : \varphi({}^g q) = {}^h\varphi(q)\}.$$

Offenbar ist dann N_φ gerade das Urbild von $\mathrm{Aut}_P(Q) \cap \varphi^{-1} \circ \mathrm{Aut}_P(R) \circ \varphi$ in $N_P(Q)$ unter dem kanonischen Homomorphismus $N_P(Q) \to \mathrm{Aut}(Q)$. Man zeigt leicht, dass $QC_P(Q) \le N_\varphi \le N_P(Q)$ ist. Nun können wir saturierte Fusionssysteme definieren.

Definition 1.30. *Es sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf der endlichen p-Gruppe P. Wir nennen eine $\mathcal{F}$-Konjugationsklasse $\mathcal{C}$ von Untergruppen von P dann* saturiert*, falls es ein $Q \in \mathcal{C}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:*

(i) Die Gruppe $\mathrm{Aut}_P(Q)$ ist eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$.

(ii) Jeder Isomorphismus $\varphi : R \to Q$ in $\mathcal{F}$ lässt sich zu einem Morphismus $\psi : N_\varphi \to P$ fortsetzen. Es gilt dann also $\varphi(r) = \psi(r)$ für alle $r \in R$.

Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ nennen wir saturiert*, falls jede $\mathcal{F}$-Konjugationsklasse von Untergruppen von P saturiert ist.*

Das durch eine Gruppe induzierte Fusionssystem ist eines unserer Hauptbeispiele für saturierte Fusionssysteme.

Beispiel 1.31. *Es sei P eine p-Sylowgruppe von G. Weiter sei $\mathcal{F}_P(G)$ die Kategorie, in der die Objekte gerade die Untergruppen von P sind, und für $Q, R \leq P$ stets*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(Q,R) = \mathrm{Hom}_G(Q,R)$$

gilt. Die Komposition von Morphismen sei die übliche Komposition von Abbildungen. Die Kategorie $\mathcal{F}_P(G)$ ist dann ein saturiertes Fusionssystem auf P. Man sagt, dass es das von G auf P induzierte Fusionssystem *ist.*

Wir führen noch einige Begriffe und Resultate im Zusammenhang mit Fusionssystemen ein. Wir beginnen mit einem Äquivalenzbegriff.

Definition 1.32. *Es seien P eine p-Gruppe und $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Fusionssysteme auf P. Dann sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$* äquivalent*, wenn es einen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$ gibt, so dass für $R, Q \leq P$ stets*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_2}(\alpha(R), \alpha(Q)) = \{\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1} : \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_1}(R,Q)\}$$

gilt.

In Anlehnung an den Satz von Frobenius für Gruppen definiert man die Nilpotenz von Fusionssystemen.

Definition 1.33. *Ein saturiertes Fusionssystem $\mathcal{F}$ auf einer p-Gruppe P ist* nilpotent*, falls $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P(P)$ ist.*

Satz 1.34. *Es sei $\mathcal{F}$ ein saturiertes Fusionssystem auf der p-Gruppe P. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann nilpotent, wenn $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ für jede Untergruppe $Q \leq P$ eine p-Gruppe ist.*

Alperins Fusionssatz ist ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung saturierter Fusionssysteme.

Definition 1.35. *Sei G eine endliche Gruppe und $H < G$ eine Untergruppe. Dann nennen wir H* stark p-eingebettet*, falls H eine nichttriviale p-Sylowgruppe von G enthält und für $g \in G \setminus H$ stets $p \nmid |H \cap gHg^{-1}|$ gilt.*

Definition 1.36. *Es sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf der p-Gruppe P. Ist $Q \leq P$ eine Untergruppe von P und $\mathcal{C}$ die $\mathcal{F}$-Konjugationsklasse von Q, so definieren wir:*

(i) Die Untergruppe Q bezeichnen wir als vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert*, wenn für $R \in \mathcal{C}$ stets $|C_P(Q)| \geq |C_P(R)|$ gilt.*

(ii) Die Untergruppe Q bezeichnen wir als vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert*, wenn für $R \in \mathcal{C}$ stets $|N_P(Q)| \geq |N_P(R)|$ gilt.*

(iii) Die Untergruppe Q ist $\mathcal{F}$-zentrisch*, falls für $R \in \mathcal{C}$ stets $C_P(R) = Z(R)$ gilt.*

(iv) Die Untergruppe Q ist $\mathcal{F}$-radikal*, falls $O_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)) = \mathrm{Inn}(Q)$ ist.*

(v) Die Untergruppe Q ist $\mathcal{F}$-wesentlich*, falls sie $\mathcal{F}$-zentrisch ist und $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q)$ eine stark p-eingebettete Untergruppe enthält.*

Ist $\mathcal{F}$ saturiert, so zeigt man, dass vollständig $\mathcal{F}$-normalisierte Untergruppen stets auch vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert sind. Weiter sind $\mathcal{F}$-wesentliche Untergruppen auch $\mathcal{F}$-radikal. Ist das zugehörige Fusionssystem $\mathcal{F}$ klar, so werden wir im Folgenden auch manchmal von zentrischen, radikalen bzw. wesentlichen Untergruppen sprechen. Alperins Fusionssatz liefert nun eine Art Erzeugendensystem der Morphismen eines saturierten Fusionssystems.

Satz 1.37 (Alperins Fusionssatz)**.** *Sei $\mathcal{F}$ ein saturiertes Fusionssystem auf der endlichen p-Gruppe P. Es sei weiter $\mathscr{S}$ die Menge aller vollständig $\mathcal{F}$-normalisierten und $\mathcal{F}$-wesentlichen Untergruppen von P. Ist dann $\varphi : Q \to R$ ein Isomorphismus in $\mathcal{F}$, so existieren*

(i) eine Folge $Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n+1} = R$ von $\mathcal{F}$-konjugierten Untergruppen,

(ii) eine Folge $S_1, \ldots, S_n$ aus $\mathscr{S}$ mit $Q_{i-1}, Q_i \leq S_i$ für $1 \leq i \leq n$,

(iii) eine Folge von $\mathcal{F}$-Automorphismen φ_i von S_i mit $\varphi_i(Q_{i-1}) = Q_i$ und

(iv) ein $\mathcal{F}$-Automorphismus ψ von P mit $\psi(Q_n) = Q_{n+1}$,

so dass gilt

$$\varphi = \psi \circ \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_1.$$

Hat eine p-Gruppe P die Eigenschaft, dass kein Fusionssystem auf P wesentliche Untergruppen besitzt, so nennen wir P *resistent*. Gegebenenfalls zeigt der Satz von Alperin, dass jedes Fusionssystem auf P die Form $\mathcal{F}_P(P \rtimes A)$ für eine p'-Untergruppe $A \leq \mathrm{Aut}(P)$ hat. Fusionssysteme dieser Art nennt man *kontrolliert*.

Wie für Gruppen können wir auch das Zentrum eines Fusionssystems definieren.

Definition 1.38. *Ist $\mathcal{F}$ ein saturiertes Fusionssystem auf einer p-Gruppe P, so ist*

$$Z(\mathcal{F}) = \{x \in P : \varphi(x) = x \text{ für alle Morphismen } \varphi \text{ mit } x \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$$

das Zentrum *von $\mathcal{F}$.*

Das Zentrum von $\mathcal{F}$ besteht also gerade aus den Elementen von P, deren $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen die Länge 1 haben. Abschließend führen wir das Konzept des direkten Produkts von Fusionssystemen ein.

Definition 1.39. *Es sei P eine endliche p-Gruppe. Das* universelle Fusionssystem *$\mathcal{U}(P)$ auf P ist dann das Fusionssystem auf P, in dem $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(P)}(Q, R)$ für $Q, R \leq P$ aus allen injektiven Gruppenhomomorphismen zwischen Q und R besteht.*

Definition 1.40. *Es sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf der endlichen p-Gruppe P.*

(i) Ein Untersystem *$\mathcal{E}$ von $\mathcal{F}$ ist eine Unterkategorie von $\mathcal{F}$, die selbst ein Fusionssystem auf P ist.*

(ii) Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Untersysteme von $\mathcal{F}$, so ist deren Schnitt *$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ das Untersystem von $\mathcal{F}$, welches gerade die Morphismen enthält, die in $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ liegen.*

Definition 1.41. *Es sei P eine endliche p-Gruppe und $\mathcal{C}$ eine Menge von Morphismen in $\mathcal{U}(P)$. Das von $\mathcal{C}$* erzeugte Fusionssystem *ist dann der Schnitt aller Teilsysteme von $\mathcal{U}(P)$, die die Morphismen aus $\mathcal{C}$ enthalten. Dieses Teilsystem enthält also alle Morphismen aus $\mathcal{C}$ und $\mathrm{Inn}(P)$ sowie beliebige Kompositionen, Restriktionen und Inverse davon.*

Definition 1.42. *Es seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Fusionssysteme auf den endlichen p-Gruppen P_1 bzw. P_2. Das* direkte Produkt *$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ ist das Fusionssystem auf $P_1 \times P_2$, welches von allen Homomorphismen $\varphi : Q_1 \times Q_2 \to R_1 \times R_2$ mit $\varphi_{|Q_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_i}(Q_i, R_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ erzeugt wird.*

Satz 1.43 ([20, Theorem 6.29])**.** *Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ saturierte Fusionssysteme auf den endlichen p-Gruppen P_1 bzw. P_2, so ist auch das Produkt $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ saturiert.*

1.9 B-Unterpaare und B-Elemente

Wir wollen nun auch ein Fusionssystem für den Block B von G definieren. Die dafür notwendige Theorie wurde in [4, 61] entwickelt. Ist D eine Defektgruppe von B, so existiert für $Q \leq D$ ein Brauer-Korrespondent b_Q von B in $C_G(Q)$. Das Paar (Q, b_Q) bildet dann ein sogenanntes *B-Unterpaar*. Ist $Q = D$, so spricht man auch von einem *B-Sylowpaar*. Man kann nun die Inklusion von Untergruppen von D auf eine Inklusion von B-Unterpaaren übertragen. Seien hierfür (Q, b_Q) und (R, b_R) B-Unterpaare mit $Q \trianglelefteq R$. Ist zusätzlich $b_Q^{RC_G(Q)} = b_R^{RC_G(Q)}$, so schreiben wir $(Q, b_Q) \trianglelefteq (R, b_R)$. Mit $\leq$ bezeichnen wir die transitive Hülle von $\trianglelefteq$. Man zeigt dann:

Proposition 1.44. *Ist (D, b_D) ein festes B-Sylowpaar, so existiert für $Q \leq D$ ein eindeutiges B-Unterpaar (Q, b_Q) mit $(Q, b_Q) \leq (D, b_D)$.*

Die Gruppe G operiert auf den B-Unterpaaren via ${}^g(Q, b_Q) = ({}^gQ, {}^gb_Q)$. Diese Operation induziert das Fusionssystem des Blocks B.

Beispiel 1.45. *Das Fusionssystem $\mathcal{F}_D(B)$ auf D ist gegeben durch*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_D(B)}(Q,R) := \{\varphi : Q \to R : \exists g \in G : {}^g(Q,b_Q) \le (R,b_R) \wedge \varphi(x) = {}^g x, \forall x \in Q\}$$

für $Q, R \le D$. Man zeigt, dass $\mathcal{F}_D(B)$ ein saturiertes Fusionssystem auf D ist und nennt es das Fusionssystem des Blocks *B.*

In dieser Situation bezeichnet man $I(B) := \mathrm{Out}_{\mathcal{F}_D(B)}(D)$ als *Trägheitsgruppe* des Blocks B. Deren Ordnung nennt man *Trägheitsindex*. Puig hat die Struktur nilpotenter Blöcke untersucht.

Satz 1.46 (Puig, [64])**.** *Ist $\mathcal{F}_D(B)$ nilpotent, so gilt $B \cong (\mathcal{O}D)^{n\times n}$ als $\mathcal{O}$-Algebren für ein $n \in \mathbb{N}$.*

In dieser Situation gilt also $l(B) = 1$, $k(B) = k(D)$ und $k_i(B) = k_{p^i}(D)$ für $i \ge 0$. Weiter hat B die Cartanmatrix $(|D|)$.

Ist (Q, b_Q) ein B-Unterpaar, für das $Q \le D$ vollständig $\mathcal{F}_D(B)$-zentralisiert ist, so kann man eine Aussage über die Defektgruppe und das Fusionssystem von b_Q machen:

Definition 1.47. *Es sei $\mathcal{F}$ ein saturiertes Fusionssystem auf der p-Gruppe P. Für $Q \le P$ habe die Kategorie $C_{\mathcal{F}}(Q)$ gerade die Untergruppen von $C_P(Q)$ als Objekte. Die Morphismen von $C_{\mathcal{F}}(Q)$ seien Gruppenhomomorphismen $\varphi : R \to S$ für $R, S \le C_P(Q)$, die sich zu einem Morphismus $\psi : QR \to QS$ von $\mathcal{F}$ mit $\psi_{|Q} = \mathrm{id}_Q$ fortsetzen lassen. Die Komposition in $C_{\mathcal{F}}(Q)$ sei die gewöhnliche Komposition von Abbildungen. Man nennt $C_{\mathcal{F}}(Q)$ den* Zentralisator *von Q in $\mathcal{F}$.*

Man zeigt, dass $C_{\mathcal{F}}(Q)$ tatsächlich ein Fusionssystem auf $C_P(Q)$ ist. Ist Q zudem vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert, so ist $C_{\mathcal{F}}(Q)$ sogar saturiert. Ist weiter $\mathcal{F} = \mathcal{F}_D(B)$ und (Q, b_Q) das zugehörige B-Unterpaar, so hat b_Q die Defektgruppe $C_D(Q)$ und das Fusionssystem $C_{\mathcal{F}}(Q)$.

B-Unterpaare verallgemeinern den Begriff der Untergruppe. Analog verallgemeinert man den Begriff des Elements einer Gruppe.

Definition 1.48. *Ist $u \in G_p$ und $b_u \in \mathrm{Bl}(\mathcal{O}C_G(u))$ ein Brauer-Korrespondent von B, so nennt man das Paar $(u, b_u) = (u, b_{\langle u\rangle})$ ein B-*Element *von G.*

Wie auf den B-Unterpaaren operiert G auch auf der Menge der B-Elemente. Die Bahnen dieser Operation werden durch das Fusionssystem $\mathcal{F}_D(B)$ beschrieben.

Lemma 1.49 ([75, Lemma 2.4])**.** *Es sei $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der $\mathcal{F}_D(B)$-Konjugationsklassen von Elementen von D, sodass $\langle u\rangle$ für $u \in \mathcal{R}$ vollständig $\mathcal{F}_D(B)$-normalisiert ist (solch ein $\mathcal{R}$ existiert). Dann ist*

$$\{(u, b_u) : u \in \mathcal{R}\}$$

ein Repräsentantensystem der G-Konjugationsklassen von B-Elementen.

Da vollständig $\mathcal{F}$-normalisierte Untergruppen auch vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert sind, hat b_u in dieser Situation die Defektgruppe $C_D(u)$ und das Fusionssystem $C_{\mathcal{F}}(u) := C_{\mathcal{F}}(\langle u\rangle)$.

Der folgende Satz von Brauer ist ein Schlüsselresultat zur Berechnung von $k(B)$.

Satz 1.50 (Brauer, [10, (6D)])**.** *Ist $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von B-Elementen, so ist*

$$k(B) = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} l(b_u).$$

Für B-Elemente (u, b_u) mit $u \notin Z(D)$, für die $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert ist, hat b_u eine Defektgruppe $C_D(u) < D$. Ist $u \in Z(D) \setminus 1$ und $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert, so dominiert b_u einen Block $\overline{b_u}$ von $\mathcal{O}[C_G(u)/\langle u\rangle]$ mit Defektgruppe $C_D(u)/\langle u\rangle$. In diesen beiden Fällen, hat eine Defektgruppe von b_u bzw. $\overline{b_u}$ stets eine kleinere Ordnung als D. Kennt man die Blockinvarianten von Blöcken mit diesen kleineren Defektgruppen, so lässt sich die Differenz $k(B) - l(B)$ berechnen. In einer speziellen Situation liefert der folgende Satz eine untere Abschätzung für $l(B)$.

Satz 1.51 (Külshammer-Okuyama, [49])**.** *Ist (u, b_u) ein B-Element mit $u \in Z(\mathcal{F})$, so gelten $k(B) \ge k(b_u)$ und $l(B) \ge l(b_u)$.*

Hat man eine solche Abschätzung für $l(B)$, so ergibt sich mit dem Wert der Differenz $k(B) - l(B)$ auch eine untere Abschätzung für $k(B)$. In der Praxis ist die so erhaltene Abschätzung für $k(B)$ häufig sehr gut.

1.10 Untere Defektgruppen

Häufig ist Wissen über die Elementarteiler der Cartanmatrix C_B von B bei der Analyse der Blockinvarianten hilfreich. Es ist wohlbekannt, dass die Elementarteiler stets Potenzen von p sind. Die Ordnung $|D|$ der Defektgruppe taucht genau einmal als Elementarteiler auf. Weitere Informationen liefert die Theorie der unteren Defektgruppen, welche sich beispielsweise in [59, 16] finden lässt. Wir führen hier allerdings nur die Resultate ein, die wir später benötigen werden.

Definition 1.52. *Für eine p-Untergruppe R von G sei:*

$$\begin{aligned} J_R(B) &:= \left\{ \sum_{g \in G_{p'}} \alpha_g g \in Z(B) : \alpha_g \neq 0 \Rightarrow \exists Q \in \mathrm{Syl}_p(C_G(g)) \exists x \in G : xQx^{-1} \leq R \right\}, \\ J_{<R}(B) &:= \sum_{Q<R} J_Q(B). \end{aligned}$$

Dann nennen wir

$$m_B^{(1)}(R) := \dim_{\mathbb{F}}(J_R(B)) - \dim_{\mathbb{F}}(J_{<R}(B))$$

die 1-Vielfachheit von R als untere Defektgruppe *von B. Ist $m_B^{(1)}(R) > 0$, so nennen wir R eine* untere Defektgruppe *von B.*

Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen von Untergruppen von D mit Ordnung p^n, so ist die Vielfachheit von p^n als Elementarteiler von C_B gerade

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} m_B^{(1)}(R).$$

Wir geben eine Möglichkeit zur Berechnung der $m_B^{(1)}(R)$ an.

Proposition 1.53 (Watanabe, [92])**.** *Es sei $u \in Q < D$. Ist $\mathcal{B}$ die Menge der Brauer-Korrespondenten von B in $C_G(u)$, deren Ordnung der Defektgruppe größer als $|Q|$ ist, so gilt*

$$m_B^{(1)}(Q) \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} m_b^{(1)}(Q).$$

1.11 Verallgemeinerte Orthogonalitätsrelationen

Durch Anwendung der Operation der Galoisgruppe eines geeigneten Kreisteilungskörpers verfeinern wir die Orthogonalitätsrelationen aus Satz 1.26 im Fall $p = 2$. Im Folgenden sei B also ein 2-Block einer endlichen Gruppe G mit Defektgruppe D und Fusionssystem $\mathcal{F}$. Wir wählen $n, r \in \mathbb{N}$, sodass $|G| = 2^n \cdot r$ und $2 \nmid r$ ist. Außerdem gehen wir von $n \geq 1$ aus. Wie üblich sei ζ_m für $m \in \mathbb{N}$ eine primitive m-te Einheitswurzel in $\mathcal{O}$. Nehmen wir ohne Einschränkung $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O}$ an, so ist $\mathbb{Q}(\zeta_{|G|}) \mid \mathbb{Q}(\zeta_r)$ eine Galoiserweiterung. Die zugehörige Galoisgruppe bezeichnen wir mit

$$\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{|G|}) \mid \mathbb{Q}(\zeta_r)) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{2^n}) \mid \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times.$$

Sicher ist dann $|\mathcal{G}| = 2^{n-1}$. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ existiert ein $\tilde{\gamma} \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(\tilde{\gamma}, |G|) = 1$, $\tilde{\gamma} \equiv 1 \pmod{r}$ und $\gamma(\zeta_{|G|}) = \zeta_{|G|}^{\tilde{\gamma}}$. Dann operiert $\mathcal{G}$ auf den B-Elementen durch

$$^{\gamma}(u, b_u) = (u^{\tilde{\gamma}}, b_u).$$

Für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und $g \in G$ setzen wir ${}^{\gamma}\chi(g) = \chi(g^{\tilde{\gamma}})$. Dadurch operiert $\mathcal{G}$ auch auf $\mathrm{Irr}(B)$. Für B-Elemente (u, b_u) liegen die Zerlegungszahlen $d^u_\varphi(\chi)$ für $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ in $\mathbb{Z}[\zeta]$, wobei $\mathrm{ord}(u) = 2^k$ und $\zeta := \zeta_{2^k}$ ist. Es existieren also für $i \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ ganze Zahlen $a^u_{\varphi,i}(\chi)$ mit

$$d^u_\varphi(\chi) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a^u_{\varphi,i}(\chi)\zeta^i.$$

Für $i \in \mathbb{Z}$ setzen wir dies durch

$$a^u_{\varphi,i}(\chi) = -a^u_{\varphi,i\pm 2^{k-1}}(\chi)$$

induktiv fort. Mit $a^u_{\varphi,i}$ bezeichnen wir den Spaltenvektor $(a^u_{\varphi,i}(\chi))_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)}$. Die Matrix mit Spalten $a^u_{\varphi,i}(\chi)$ bzw. $a^u_{\varphi,i}$ für $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$ bezeichnen wir mit $a^u_i(\chi)$ bzw. a^u_i. Speziell für $i = 0$ nennen wir $a^u_{\varphi,0}(\chi)$, $a^u_{\varphi,0}$, $a^u_0(\chi)$ bzw. a^u_0 den *rationalen Teil* von $d^u_\varphi(\chi)$, d^u_φ, $d^u(\chi)$ bzw. d^u. Analog definieren wir auch den rationalen Teil beliebiger Elemente von $\mathbb{Z}[\zeta]$. Weiter definieren wir $a^u_{\varphi,i}(\chi)$ und $a^u_i(\chi)$ auch für verallgemeinerte Charaktere χ durch lineare Fortsetzung. Nun gilt

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a^u_{\varphi,i}(\chi)\zeta^{i\tilde{\gamma}} = \gamma(d^u_\varphi(\chi)) = d^{u^{\tilde{\gamma}}}_\varphi(\chi) = d^u_\varphi({}^{\gamma}\chi).$$

Folglich ist

$$a^u_{\varphi,i}(\chi) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} d^{u^{\tilde{\gamma}}}_\varphi(\chi)\zeta^{-i\tilde{\gamma}}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar das folgende Resultat.

Proposition 1.54. *Es seien (u, b_u) und $(u', b_{u'})$ B-Elemente, sodass $\langle u\rangle$ und $\langle u'\rangle$ nicht in $\mathcal{F}$ konjugiert sind. Dann ist für $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$, $\varphi' \in \mathrm{IBr}(b_{u'})$, $k := \mathrm{ord}(u)$, $k' := \mathrm{ord}(u')$, $i \in \{0, \ldots, 2^{k-1}-1\}$ und $i' \in \{0, \ldots, 2^{k'-1} - 1\}$ stets*

$$(a^u_{\varphi,i}, a^{u'}_{\varphi',i'}) = 0.$$

Beweis. Da $d^{u^{\tilde{\gamma}}}_\varphi$ und $d^{u'^{\tilde{\gamma}'}}_{\varphi'}$ für $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}$ stets Spalten von Zerlegungszahlen nicht G-konjugierter B-Elemente sind, verschwinden nach den Orthogonalitätsrelationen Satz 1.26 alle Summanden in

$$(a^u_{\varphi,i}, a^{u'}_{\varphi',i'}) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \sum_{\gamma'\in\mathcal{G}} (d^{u^{\tilde{\gamma}}}_\varphi, d^{u'^{\tilde{\gamma}'}}_{\varphi'})\zeta_{2^k}^{-i\tilde{\gamma}}\zeta_{2^{k'}}^{i'\tilde{\gamma}'}.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 1.55. *Unter diesen Bedingungen sind folglich auch die Spalten d^u_φ und $a^{u'}_{\varphi',i'}$ orthogonal. Wir werden dies häufig benutzen.*

Mit dem Wert dieses Skalarproduktes in einem weiteren Spezialfall beschäftigt sich die nächste Proposition.

Proposition 1.56. *Es sei (u, b_u) ein B-Element mit Cartanmatrix $C := C_{b_u} = (c_{\varphi\psi})$, für das $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert ist und $\mathrm{ord}(u) = 2^k > 1$ gilt. Weiter gelte $\mathrm{Aut}_D(\langle u\rangle) = 1$ bzw. $C_D(u) = N_D(\langle u\rangle)$. Dann ist*

$$(a^u_{\varphi,i}, a^u_{\psi,j}) = \begin{cases} \frac{c_{\varphi\psi}}{2^{k-1}} & \textit{falls } i = j, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

für $i, j \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{IBr}(b_u)$.

Beweis. Nach der obigen Formel ist

$$(a^u_{\varphi,i}, a^u_{\psi,j}) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\gamma,\delta\in\mathcal{G}} (d^{u^{\tilde{\gamma}}}_\varphi, d^{u^{\tilde{\delta}}}_\psi)\zeta^{-i\tilde{\gamma}+j\tilde{\delta}}.$$

Ist hierbei $u^{\tilde{\gamma}} = u^{\tilde{\delta}}$, so ist $(d_\varphi^{u^{\tilde{\gamma}}}, d_\psi^{u^{\tilde{\delta}}}) = c_{\varphi\psi}$ nach den Orthogonalitätsrelationen Satz 1.26. Ist hingegen $u^{\tilde{\gamma}} \neq u^{\tilde{\delta}}$, so sind die Elemente $u^{\tilde{\gamma}}$ und $u^{\tilde{\delta}}$ nach Voraussetzung nicht in $\mathcal{F}$ konjugiert, denn $1 = \mathrm{Aut}_D(\langle u\rangle) \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(\langle u\rangle))$. Gegebenenfalls verschwindet also das Skalarprodukt $(d_\varphi^{u^{\tilde{\gamma}}}, d_\psi^{u^{\tilde{\delta}}})$. Der Fall $u^{\tilde{\gamma}} = u^{\tilde{\delta}}$ tritt genau dann ein, wenn $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\delta} \pmod{2^k}$ ist. Es ist also

$$(a_{\varphi,i}^u, a_{\psi,j}^u) = \frac{c_{\varphi\psi}}{2^{2n-2}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \sum_{l=1}^{2^{n-k}} \zeta^{\tilde{\gamma}(j-i)} = \frac{c_{\varphi\psi}}{2^{n+k-2}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \zeta^{\tilde{\gamma}(j-i)}.$$

Die Summe

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \zeta^{\tilde{\gamma}(j-i)}$$

verschwindet für $2^{k-1} \nmid j-i$, d.h. für $i \neq j$. Ist $i = j$, so ist $\zeta^{\tilde{\gamma}(j-i)} = 1$ und

$$(a_{\varphi,i}^u, a_{\psi,j}^u) = \frac{c_{\varphi\psi}}{2^{n+k-2}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} 1 = \frac{c_{\varphi\psi}}{2^{k-1}}.$$

Insgesamt ergibt sich die Behauptung. □

Der Beweis der letzten Aussage verlief im Wesentlichen analog zum Beweis von [74, Proposition 5.1], welche sich mit dem Fall $l(b_u) = 1$ beschäftigt.

Proposition 1.57 ([74, Proposition 5.1])**.** *Es sei (u, b_u) ein B-Element mit $l(b_u) = 1$. Ist $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert und* $\mathrm{ord}(u) = 2^k$ *für $k \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$(a_i^u, a_j^u) = \begin{cases} 2|N_D(\langle u\rangle) \cap C_D(u^i)/\langle u\rangle| & \textit{falls } u^j \sim_{N_D(\langle u\rangle)} u^i \not\sim_{N_D(\langle u\rangle)} u^{j+2^{k-1}}, \\ -2|N_D(\langle u\rangle) \cap C_D(u^i)/\langle u\rangle| & \textit{falls } u^j \not\sim_{N_D(\langle u\rangle)} u^i \sim_{N_D(\langle u\rangle)} u^{j+2^{k-1}}, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

für $i, j \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$. Insbesondere ist

$$(a_0^u, a_0^u) = 2|N_D(\langle u\rangle)/\langle u\rangle|.$$

Dieses Resultat geht auf die folgende Beziehung zurück, welche sich im Beweis von [76, Lemma 3.2] findet.

Lemma 1.58. *Es sei (u, b_u) ein B-Element mit $l(b_u) = 1$. Weiter sei $k \in \mathbb{Z}$. Sind u und u^k in D konjugiert, so ist für $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und $i \in \mathbb{Z}$ stets*

$$a_{\varphi,i}^u(\chi) = a_{\varphi,ki}^u(\chi).$$

Beweis. Sicher ist k ungerade. Da u und u^k in D konjugiert sind, sind die B-Elemente (u, b_u) und $(u^k, b_{u^k}) = (u^k, b_u)$ ebenfalls konjugiert. Ist γ der Automorphismus $\zeta \mapsto \zeta^k$ in $\mathcal{G}$, so ergibt sich $d_\varphi^u(\chi) = d_\varphi^{u^{\tilde{\gamma}}}(\chi) = \gamma(d_\varphi^u(\chi))$. Aus der Definition der $a_{\varphi,i}^u(\chi)$ folgt somit unmittelbar die behauptete Gleichheit. □

Ist $2^l = \mathrm{ord}(u)$ mit $l > 1$ und sind in obiger Situation u und u^{-1} konjugiert, so gilt folglich $a_{\varphi,2^{l-2}}^u = a_{\varphi,-2^{l-2}}^u = -a_{\varphi,2^{l-2}}^u$, d.h. $a_{\varphi,2^{l-2}}^u = 0$. Eine Verallgemeinerung von Proposition 1.57 bzw. Lemma 1.58 auf den Fall $l(b_u) > 1$ über die Situation in Proposition 1.56 hinaus ist nicht ohne Weiteres möglich. Dies zeigt [33, Question 1], welche in [33] negativ beantwortet wird.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Beziehungen zwischen Höhen von Charakteren und der Gestalt der a_i^u.

Lemma 1.59 (Sambale, [76, Lemma 3.1])**.** *Es sei (u, b_u) ein B-Element mit $l(b_u) = 1$ und $\mathrm{ord}(u) = 2^k$. Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 0$, so ist die Summe*

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi)$$

eine ungerade Zahl.

Bemerkung 1.60. *Aus dem Beweis von [76, Lemma 3.1] folgt offenbar auch die Umkehrung dieses Lemmas.*

In einem Spezialfall erhalten wir aus den letzten beiden Resultaten, dass sich die Höhe von χ aus dem rationalen Teil von $d^u(\chi)$ ergibt:

Lemma 1.61. *Ist (u, b_u) ein B-Element mit $l(b_u) = 1$ und $u \sim_{\mathcal{F}} u^{-1}$, so ist $a_0^u(\chi)$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau dann ungerade, wenn χ die Höhe 0 hat.*

Beweis. Das Element u habe die Ordnung 2^k mit $k \in \mathbb{N}$. Da u und u^{-1} konjugiert sind, ist nach Lemma 1.58 für $i \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ stets

$$a_i^u(\chi) = a_{-i}^u(\chi) = -a_{2^{k-1}-i}^u(\chi).$$

Es folgt insbesondere $a_{2^{k-2}}^u(\chi) = 0$. Ist nun $a_i^u(\chi) \neq 0$ und $i \notin \{0, 2^{k-2}\}$, so sind i und $2^{k-1} - i$ verschieden und $a_i^u(\chi)$ und $a_{2^{k-2}-i}^u(\chi)$ haben denselben Betrag. Die Parität der Summe

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi)$$

ist folglich gleich der Parität von $a_0^u(\chi)$. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 1.59 und Bemerkung 1.60. □

Für $p > 2$ können ebenfalls Schlüsse aus der Operation der Gruppe $\mathcal{G}$ gezogen werden. Die Theorie ist dann allerdings komplizierter. In [74, Section 5.2] finden sich Resultate zu diesem Fall.

1.12 Beiträge von B-Elementen

Beiträge wurden von Brauer in [9] eingeführt. Mit ihnen kann man Höhen von irreduziblen Charakteren bestimmen. Zusätzlich sind sie unentbehrlich für die Analyse von verallgemeinerten Charakteren von B.

Definition 1.62. *Für ein B-Element (u, b_u) nennen wir die Matrix $d^u C_{b_u}^{-1} \overline{d^u}^T = (m_{\chi\psi}^u)_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)}$* Beitragsmatrix *von (u, b_u). Die Einträge $m_{\chi\psi}^u$ werden* Beiträge *genannt. Sind χ und ψ verallgemeinerte Charaktere von B, so sei allgemeiner $m_{\chi\psi}^u = d^u(\chi) C_{b_u}^{-1} \overline{d^u(\psi)}^T$.*

Wir sagen auch, dass $m_{\chi\psi}^u$ der Beitrag des B-Elements (u, b_u) zum Skalarprodukt $(\chi, \psi)_G$ ist. Dies wird durch den folgenden Satz begründet.

Satz 1.63 (Brauer, [9, (5B)])**.** *Es sei $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Für $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(B)$ gilt dann*

$$\sum_{(u,b_u) \in \mathcal{R}} m_{\chi\psi}^u = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \chi = \psi, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für verallgemeinerte Charaktere χ und ψ von B folgt somit, dass

$$\sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} m^u_{\chi\psi}$$

gerade das Skalarprodukt $(\chi,\psi)_G$ ist. Auch zur Berechnung von Höhen von Charakteren kann man Beiträge benutzen.

Satz 1.64 (Brauer, [9, (5G), (5H)])**.** *Es sei (u,b_u) ein B-Element. Weiter habe B Defekt d. Sind dann $\chi,\psi\in\operatorname{Irr}(B)$, so gelten:*

(i) Gilt $h(\chi)\ge h(\psi)$, so ist $\nu(m^u_{\chi\psi})\ge h(\chi)-d$. Ist hierbei $h(\psi)>0$ oder u in $\mathcal{F}_D(B)$ nicht zu einem Element von $Z(D)$ konjugiert, so ist die Ungleichung echt.

(ii) Ist $h(\psi)=0$ und $u\in Z(D)$, so ist $\nu(m^u_{\chi\psi})=h(\chi)-d$.

Insbesondere verschwindet die Matrix $d^u(\chi)$ für $\chi\in\operatorname{Irr}(B)$ und $u\in Z(D)$ nicht. Ein äußerst nützliches Resultat über Charaktere von Höhe 0 ist das Folgende.

Satz 1.65 (Murai, [55, Corollary 1.15])**.** *Ist (u,b_u) ein B-Element, $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert und $\chi,\psi\in\operatorname{Irr}(B)$, so liegt $|C_D(u)|m^u_{\chi\psi}$ genau dann in $\mathcal{O}^\times$, wenn χ und ψ Höhe 0 haben.*

Ähnliche Resultate sind in [15, Corollary 2] und [54, Proposition 1.13] zu finden. Dieses Resultat erlaubt auch eine Verfeinerung von Lemma 1.59.

Lemma 1.66. *Es sei $p=2$, (u,b_u) ein B-Element und $\langle u\rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert. Ist dann $\chi\in\operatorname{Irr}_0(B)$ und m_0 der rationale Teil von $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}$, so ist m_0 ungerade.*

Beweis. Ist C die Cartanmatrix von b_u, so ist $m^u_{\chi\chi}=d^u(\chi)C^{-1}\overline{d^u(\chi)}^T$ nach Definition. Offenbar ist $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}\in\mathbb{Z}[\zeta]$ dann reell, wobei $\zeta=\zeta_{2^k}$ eine primitive $2^k=\operatorname{ord}(u)$-te Einheitswurzel ist. Es existieren also $m_i\in\mathbb{Z}$ für $i\in\{0,\ldots,2^{k-2}-1\}$ mit

$$|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}=m_0+\sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} m_i(\zeta^i+\zeta^{-i}).$$

Nach Satz 1.65 ist $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}\in\mathcal{O}^\times$, d.h. $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}\not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$. Mit $\zeta\equiv 1 \pmod{(\pi)}$ folgt nun die Behauptung. $\square$

Wir zeigen noch eine weitere Anwendung für Satz 1.65 für Blöcke mit speziellen Cartanmatrizen.

Lemma 1.67. *Es sei*

$$C=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

und $0\ne v\in\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}]^3$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann gelten:

(i) Der rationale Teil von $v^TC\overline{v}$ ist mindestens 3. Gleichheit tritt nur dann auf, wenn ein $i\in\mathbb{Z}$ existiert, sodass v das $\zeta^i_{2^n}$-fache eines ganzzahligen Vektors ist.

(ii) Ist $\nu(v^TC\overline{v})=0$ und der rationale Teil von $v^TC\overline{v}$ größer als 3, so ist der rationale Teil auch größer als 5.

Beweis. Es existieren ganzzahlige Vektoren $v_0,\ldots,v_{2^{n-1}-1}$ mit

$$v=\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} v_i\zeta^i_{2^n}.$$

Dann ist der rationale Teil von $v^T C\overline{v}$ gleich $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} v_i^T C v_i$ und da C positiv definit ist, genügt es für den Beweis von (i), die Behauptung für ganzzahlige Vektoren v zu beweisen. Setzen wir $v = (a, b, c)^T$, so ergibt sich

$$v^T C\overline{v} = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2.$$

Von diesen sechs Summanden verschwinden offensichtlich wenigstens drei nicht und (i) folgt. In der Situation von (ii) stellt man mit (i) fest, dass die Behauptung gilt, wenn v nicht das $\zeta_{2^n}^i$-faches eines ganzzahligen Vektors für ein $i \in \mathbb{Z}$ ist. Ist v ein solches Vielfaches, so folgt die Behauptung ebenfalls nach einer kurzen Fallunterscheidung aus obiger Gleichung für $v^T C\overline{v}$. □

Bemerkung 1.68. *(i) Es sei (u, b_u) ein B-Element mit Cartanmatrix*

$$C_{b_u} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ relativ zu einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-Basis. Man ermittelt leicht, dass C_{b_u} die Elementarteiler 2^n, 2^n und 2^{n+2} hat. Die zu b_u gehörige Defektgruppe hat also die Ordnung 2^{n+2}. Nun ist $d^u C_{b_u}^{-1} \overline{d^u}^T$ die Beitragsmatrix zum B-Element (u, b_u) und die Matrix C aus Lemma 1.67 ist gerade $2^{n+2} C_{b_u}^{-1}$. Wir werden Lemma 1.67 häufig in dieser Situation im Zusammenspiel mit Satz 1.65 ausnutzen.

(ii) Ist (u, b_u) ein B-Element mit Cartanmatrix

$$C_{b_u} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 1 & . & 2 \end{pmatrix}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ relativ zu einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-Basis, so berechnet man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & . \\ . & -1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}^T C_{b_u} \begin{pmatrix} 1 & 1 & . \\ . & -1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In diesen Situationen kann also ebenfalls Lemma 1.67 angewandt werden.

1.13 Die $*$-Konstruktion

Die $*$-Konstruktion wurde von Broué und Puig in [18] eingeführt und bietet eine Möglichkeit mit verallgemeinerten Charakteren von D verallgemeinerte Charaktere von B zu konstruieren.

Definition 1.69. *Einen verallgemeinerten Charakter λ von D nennen wir $\mathcal{F}$-*stabil*, wenn für $x, y \in D$ mit $x \sim_{\mathcal{F}} y$ stets $\lambda(x) = \lambda(y)$ gilt.*

Für ein B-Element (u, b_u), $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$ und $g \in C_G(u)$ definieren wir nun

$$\widetilde{\varphi}(g) := \begin{cases} \varphi(s) & \text{falls } g = us \text{ mit } s \in C_G(u)_{p'} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sei nun $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Dann gilt für verallgemeinerte Charaktere χ von B

$$\chi = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(b_u)} d_\varphi^u(\chi)\widetilde{\varphi}^G.$$

Definition 1.70. *Ist λ ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter von D und χ ein verallgemeinerter Charakter von B, so sei*

$$\lambda * \chi = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(b_u)} \lambda(u) d^u_\varphi(\chi)\widetilde{\varphi}^G.$$

Dann folgt:

Satz 1.71 (Broué-Puig, [18, Theorem])**.** *Ist λ ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter von D und χ ein verallgemeinerter Charakter von B, so ist $\lambda * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B.*

Man zeigt auch (vgl. [80, Lemma 10]), dass in dieser Situation

$$d^u_\varphi(\lambda * \chi) = \lambda(u) d^u_\varphi(\chi)$$

für die verallgemeinerten Zerlegungszahlen zu (u, b_u) gilt. Speziell für den regulären Charakter von D ergibt sich dann:

Satz 1.72. *Ist λ der reguläre Charakter von D, so gilt für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(B)$ stets $(\lambda * \chi, \psi)_G \neq 0$. Der Charakter ψ ist also irreduzibler Summand (mit Vorfaktor) von $\lambda * \chi$.*

Beweis. Der Beitrag $m^1_{\chi\psi}$ ist bekanntlich rational und verschwindet nach Satz 1.64 nicht. Da λ nur auf 1 nicht verschwindet, folgt $(\lambda * \chi, \psi)_G = |D| m^1_{\chi\psi} \neq 0$. □

Insbesondere erhält man durch ∗-Konstruktion von $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ mit allen Elementen einer Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls der $\mathcal{F}$-stabilen Charaktere also alle irreduziblen Charaktere von B als irreduzible Summanden. Der obige Beweis dieser Beobachtung stammt von Benjamin Sambale.

Für $\mathcal{F}$-stabile lineare Charaktere von D können wir mehr über die ∗-Konstruktion sagen:

Definition 1.73. *Die* Fokalgruppe $\mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \mathfrak{foc}(B)$ *von $\mathcal{F}$ bzw. B ist die Untergruppe von D, die durch die Elemente uv^{-1} mit $u, v \in D$ und $u \sim_\mathcal{F} v$ erzeugt wird.*

Man zeigt leicht, dass die Fokalgruppe die Kommutatorgruppe D' enthält.

Satz 1.74 (Broué-Puig, [18, Corollary])**.** *Die Gruppe* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ *operiert durch ∗-Konstruktion auf* $\mathrm{Irr}(B)$*.*

Offenbar erhält diese Operation die Grade der Charaktere. Über die Einschränkung der Operation auf Charaktere von Höhe 0 kann man noch mehr sagen:

Satz 1.75 (Robinson, [70, Section 1])**.** *Die Operation von* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ *auf* $\mathrm{Irr}_0(B)$ *ist frei.*

Wie in [65, Section 1.2] bemerkt, folgt dies auch bereits aus [17, Theorem 1.5].

Das folgende Resultat beschäftigt sich mit Bahnlängen der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$. Als Anwendung erhalten wir eine Beschreibung von Untergruppen von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$, die auf ganz $\mathrm{Irr}(B)$ frei operieren. Die Argumentation ist im Wesentlichen dem Beweis von [70, Theorem 2] entnommen.

Lemma 1.76. *Für die Operation von* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ *auf* $\mathrm{Irr}(B)$ *gelten:*

(i) Sind $\lambda \in \mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\lambda * \chi = \chi$, so gilt $Z(D) \leq \ker(\lambda)$.

(ii) Die Länge jeder Bahn ist ein Vielfaches von $|Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$.

(iii) Hat eine Untergruppe $F \leq \mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ trivialen Schnitt mit $\mathrm{Irr}(D/Z(D)\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$, so ist die auf F eingeschränkte Operation frei.

Beweis. Es seien $\lambda \in \mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\lambda * \chi = \chi$ beliebig gegeben. Für $z \in Z(D)$ gilt dann $\lambda(z)d^u(\chi) = d^u(\chi)$. Da $d^u(\chi)$ nicht vollständig verschwindet, ist $\lambda(z) = 1$ und somit

$z \in \ker(\lambda)$. Die Aussage (i) folgt. Es ergibt sich auch, dass die Ordnung des Stabilisators von χ höchstens $|D : Z(D)\,\mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$ ist. Die Bahnlänge von χ ist also mindestens

$$\frac{|D : \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|}{|D : Z(D)\,\mathfrak{foc}(\mathcal{F})|} = |Z(D)\,\mathfrak{foc}(\mathcal{F}) : \mathfrak{foc}(\mathcal{F})| = |Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|.$$

Da die Bahnlänge und $|Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$ beides Potenzen von p sind, folgt (ii). Für die dritte Aussage sei F eine Gruppe mit der gegebenen Eigenschaft. Sind dann $\lambda \in F$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\lambda * \chi = \chi$ gegeben, so gilt $Z(D) \le \ker(\lambda)$ nach (i). Dann ist aber $\lambda \in \mathrm{Irr}(D/Z(D)\,\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ und somit $\lambda = 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}$. Die Aussage (iii) folgt. □

Robinson liefert auch eine nützliche Folgerung daraus.

Korollar 1.77 (Robinson, [70, Corollary 5])**.** *Alle Cartan-Invarianten von B sind durch den Index $|Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$ teilbar.*

Hieraus folgt wiederum:

Korollar 1.78. *Alle Elementarteiler der Cartanmatrix von B sind durch $|Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$ teilbar.*

Wir nutzen diese Theorie um [79, Lemma 2] geringfügig zu verallgemeinern. Der Beweis ist weitgehend zum Beweis von [79, Lemma 2] identisch.

Definition 1.79. *Eine Matrix M heißt* unzerlegbar*, falls es keine Umordnung der Zeilen und Spalten gibt, sodass M eine direkte Summe kleinerer Matrizen ist. Andernfalls nennen wir M* zerlegbar*.*

Proposition 1.80. *Ist C die Cartanmatrix von B und hat C nur die zwei verschiedenen Elementarteiler $|D|$ und (eventuell mehrfach) $e := |Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})|$, so ist die Matrix S^TCS für jedes $S \in \mathrm{GL}(l(B), \mathbb{Z})$ unzerlegbar.*

Beweis. Wir gehen vom Gegenteil der gewünschten Aussage aus. Sei S also so gewählt, dass

$$C = S^T \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} S$$

mit $C_1 \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ und $C_2 \in \mathbb{Z}^{(l(B)-m)\times(l(B)-m)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \le m < l(B)$ gilt. Bekanntlich ist jeder Eintrag von C durch e teilbar. Die Matrix $\widetilde{C} := C \cdot e^{-1}$ hat also immer noch nur ganzzahlige Einträge. Zudem besitzt $\widetilde{C}$ die Elementarteiler $|D|e^{-1}$ und (eventuell mehrfach) 1. Es existieren Matrizen $\widetilde{C_1} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ und $\widetilde{C_2} \in \mathbb{Z}^{(l(B)-m)\times(l(B)-m)}$ mit

$$\widetilde{C} = S^T \begin{pmatrix} \widetilde{C_1} & 0 \\ 0 & \widetilde{C_2} \end{pmatrix} S.$$

Ohne Einschränkung gehen wir von $\det \widetilde{C_1} = 1$ aus. Es sei Q der Teil der gewöhnlichen Zerlegungsmatrix, der zu C_1 gehört, d.h. es ist $Q^TQ = C_1$. Nach Lemma 1.76 tritt in Q jede Zeile e-fach auf. Ist $\widetilde{Q}$ die $\bigl(k(B)e^{-1} \times m\bigr)$-Matrix, die entsteht, wenn man jede dieser e identischen Zeilen durch nur eine Zeile mit diesen Einträgen ersetzt, so gilt $\widetilde{Q}^T\widetilde{Q} = C_1 \cdot e^{-1} = \widetilde{C_1}$. Aus der Formel von Binet-Cauchy folgt dann

$$1 = \det \widetilde{C_1} = \sum_{\substack{V \subseteq \{1,\ldots,k(B)e^{-1}\} \\ |V|=m}} \det Q_V^T Q_V,$$

wobei Q_V die $(m\times m)$-Teilmatrix von $\widetilde{Q}$ ist, die gerade die zu den Elementen von V gehörigen Zeilen von $\widetilde{Q}$ enthält. Es ist zu bemerken, dass hieraus insbesondere $k(B)e^{-1} \ge m$ folgt. Da die Determinanten $\det Q_V^TQ_V$ ganzzahlig und nichtnegativ sind, existiert also ein V, sodass $\det Q_V^TQ_V = 1$ ist und sodass die übrigen Determinanten verschwinden.

Wir bezeichnen die Zeilen von $\widetilde{Q}$ mit $q_1, \ldots, q_{k(B)e^{-1}}$. Ohne Einschränkung sind $q_1, \ldots, q_m$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig. Ist $i > m$, so sind $q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_m$ und q_i für beliebiges $j \in \{1, \ldots, m\}$ hingegen linear abhängig. Nach dem Austauschsatz von Steinitz ist q_i der Nullvektor, d.h. alle Zeilen von $\widetilde{Q}$ außer den ersten m verschwinden. Somit verschwinden nach einer geeigneten Anordnung gerade die ersten $e \cdot m$ Zeilen von Q nicht.

Es sei nun (u, b_u) ein B-Element mit $u \in (Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F})) \setminus \{1\}$. Solch ein u existiert, da $\mathcal{F}$ nicht nilpotent ist und somit $\mathfrak{foc}(\mathcal{F}) \neq 1$ gilt. Dann ist jede Spalte von d^u orthogonal zu jeder Spalte von Q. Da $u \in \mathfrak{foc}(\mathcal{F})$ ist, sind auch in d^u die Zeilen zu $\mathrm{Irr}(Z(D)/Z(D) \cap \mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$-konjugierten Charakteren identisch. Somit verschwinden die ersten $e \cdot m$ Einträge von d^u in allen Spalten. Das ist jedoch wegen $u \in Z(D)$ ein Widerspruch. Folglich existiert ein solches S nicht. □

Es seien λ und μ $\mathcal{F}$-stabile Charaktere von D. Sind uns die Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ für einen Charakter χ von B und alle B-Elemente (u, b_u) aus einem Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen bekannt, so können wir mit Satz 1.63 das Skalarprodukt

$$(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G = \sum_{(u,b_u) \in \mathcal{R}} \lambda(u)\overline{\mu(u)} m^u_{\chi\chi}$$

berechnen. Aus diesem Skalarprodukt werden wir häufig auf die Struktur der irreduziblen Summanden von $\lambda * \chi$ und $\mu * \chi$ schließen. Wir beenden den Unterabschnitt mit zwei Hilfsresultaten zu speziellen Situationen, die hierbei auftreten können.

Lemma 1.81. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Für $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von D gelte $(\lambda_i * \chi, \lambda_j * \chi)_G = r + \delta_{ij}$ für ein $r \in \{1, 2\}$ und $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Weiter gelte eine der folgenden Bedingungen:*

(i) $k \leq 2$;

(ii) $r = 1$, $k = 3$ *und es existiert ein B-Element (u, b_u), sodass $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(u) \neq \pm 1$ und sodass $d^u(\chi)$ nicht verschwindet;*

(iii) $r = 1$ *und* $k \geq 4$;

(iv) $r = 2$, $k = 4$ *und es existiert ein B-Element (u, b_u), sodass $\frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)(u) \neq \pm 1$ und sodass $d^u(\chi)$ nicht verschwindet;*

(v) $r = 2$ *und* $k \geq 5$.

Dann existieren im Fall $r = 1$ verschiedene Charaktere $\chi_1, \psi_1, \ldots, \psi_k \in \mathrm{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \delta_1, \ldots, \delta_k$ mit

$$\lambda_i * \chi = \epsilon_1 \chi_1 + \delta_i \psi_i$$

für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Für $r = 2$ existieren verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2, \psi_1, \ldots, \psi_k \in \mathrm{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_1, \ldots, \delta_k$ mit

$$\lambda_i * \chi = \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_2 \chi_2 + \delta_i \psi_i$$

für $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis. Wegen $(\lambda_i * \chi, \lambda_i * \chi)_G = r + 1 < 4$ ist $\lambda_i * \chi$ eine vorzeichenbehaftete Summe von genau $r + 1$ verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Aus $(\lambda_i * \chi, \lambda_j * \chi)_G = r$ für $i \neq j$ ergibt sich, dass $\lambda_i * \chi$ und $\lambda_j * \chi$ genau r Summanden gemeinsam haben. Auch die Vorzeichen dieser Summanden stimmen überein. Für $k \leq 2$ ist also nichts mehr zu zeigen.

Wir behandeln nun zunächst den Fall $r = 1$ und nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Für $k = 3$ liefert eine kurze Fallunterscheidung dann die Existenz von verschiedenen Charakteren $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_4$ mit:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 * \chi &= \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_2 \chi_2, \\
\lambda_2 * \chi &= \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_3 \chi_3, \\
\lambda_3 * \chi &= \epsilon_2 \chi_2 + \epsilon_3 \chi_3.
\end{aligned}$$

Nun folgt jedoch

$$\chi = \frac{\epsilon_1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) * \chi,$$

d.h. insbesondere $d^u(\chi) = \frac{\epsilon_1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(u)d^u(\chi)$ für alle B-Elemente (u, b_u). In der Situation von (ii) ist das ein Widerspruch. Ist $k > 3$, so ergibt sich nach geeigneter Umordnung ebenfalls obige Gestalt für $\lambda_1 * \chi, \ldots, \lambda_3 * \chi$. Dann gibt es aber offensichtlich keine Möglichkeit für $\lambda_4 * \chi$ mehr. Das schließt den Fall $r = 1$ ab.

Nun sei $r = 2$. Wieder nehmen wir an, dass die Behauptung falsch ist. Für $k = 4$ führt die Annahme, dass es in $\lambda_1 * \chi, \ldots, \lambda_3 * \chi$ insgesamt höchstens vier verschiedene irreduzible Summanden gibt auf die Situation

$$\begin{aligned}
\lambda_1 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3,\\
\lambda_2 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_4\chi_4,\\
\lambda_3 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_3\chi_3 + \epsilon_4\chi_4,\\
\lambda_4 * \chi &= \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3 + \epsilon_4\chi_4
\end{aligned}$$

mit verschiedenen $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \operatorname{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \chi_4$. Dann ist

$$\chi_1 = \frac{\epsilon_1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4) * \chi$$

und wie im Fall (ii) oben ergibt sich ein Widerspruch in der Situation von (iv). Es gibt also in $\lambda_3 * \chi$ einen irreduziblen Summanden, der in $\lambda_1 * \chi$ und $\lambda_2 * \chi$ nicht auftaucht. Dann führt eine kurze Fallunterscheidung auf die Behauptung im Fall (iv). Ist $k \geq 5$ und die Behauptung falsch, so folgt wieder, dass $\lambda_1 * \chi, \ldots, \lambda_4 * \chi$ die oben angegebene Form haben. Dann gibt es aber offenbar keine Möglichkeit für $\lambda_5 * \chi$ mehr. Das zeigt die Behauptung für $r = 2$ in allen angegebenen Fällen. □

Bemerkung 1.82. *Für $r = 2$ und $k = 3$ ist im Lemma die Konstellation*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3,\\
\lambda_2 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_4\chi_4,\\
\lambda_3 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_3\chi_3 + \epsilon_4\chi_4
\end{aligned}$$

für verschiedene Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \operatorname{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_4 \in \{\pm 1\}$ möglich. Deshalb kann man Lemma 1.81 nicht ohne Weiteres auf diesen Fall verallgemeinern.

Wie oben festgestellt wurde, operiert die Gruppe $\operatorname{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ auf $\operatorname{Irr}(B)$. Diesen Umstand können wir mit dem folgenden Lemma ausnutzen.

Lemma 1.83. *Es sei A eine endliche Gruppe, die auf $\operatorname{Irr}(B)$ operiert. Diese Operation induziert auch eine Operation von A auf $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(B)$. Sind dann $\chi \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(B)$ und $r \in \{1, 2, 3\}$ mit $r \neq 3$ oder $3 \nmid |A|$ gegeben, sodass für $a, b \in A$ stets*

$$({}^a\chi, {}^b\chi)_G = \begin{cases} r & \textit{falls } a = b,\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

gilt, so sind die ${}^a\chi$ für $a \in A$ vorzeichenbehaftete Summen von r verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Die Mengen der auftretenden irreduziblen Summanden sind dabei für verschiedene $a \in A$ disjunkt.

Beweis. Wegen $r < 4$ sind die ${}^a\chi$ für $a \in A$ offenbar tatsächlich Summen (mit Vorzeichen) von genau r verschiedenen irreduziblen Charakteren. Wir setzen

$$\chi = \epsilon_1\chi_1 + \ldots + \epsilon_r\chi_r$$

für verschiedene $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \operatorname{Irr}(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r \in \{\pm 1\}$. Für $r = 1$ ist offenbar nichts mehr zu zeigen.

Sei nun $r = 2$ und seien verschiedene $a, b \in A$ gegeben, sodass die Mengen $\{{}^a\chi_1, {}^a\chi_2\}$ und $\{{}^b\chi_1, {}^b\chi_2\}$ nicht disjunkt sind. Dann sind diese beiden Mengen wegen $({}^a\chi, {}^b\chi)_G = 0$ sogar gleich und es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

- ${}^b\chi = \epsilon_1 {}^a\chi_1 + \epsilon_2 {}^a\chi_2$,
- ${}^b\chi = \epsilon_1 {}^a\chi_2 + \epsilon_2 {}^a\chi_1$.

In beiden Fällen gilt allerdings nicht $({}^a\chi, {}^b\chi)_G = 0$ und die Behauptung folgt für $r = 2$.

Sei nun schließlich $r = 3$ und $3 \nmid |A|$. Wir nehmen an, dass das Resultat falsch ist. Es existiert also ein Gegenbeispiel $(a, b) \in A \times A$ mit $a \neq b$, für das die Mengen $\{{}^a\chi_1, {}^a\chi_2, {}^a\chi_3\}$ und $\{{}^b\chi_1, {}^b\chi_2, {}^b\chi_3\}$ nicht disjunkt sind. Dann existiert auch ein Gegenbeispiel (a, b) mit $b = 1$ und $a \neq 1$, wie sich durch Anwendung von b^{-1} auf ${}^a\chi$ und ${}^b\chi$ zeigen lässt. Ohne Einschränkung können wir also von $b = 1$ ausgehen. Wir wählen unter solchen Gegenbeispielen eines aus, für das die Ordnung von a minimal wird. Wegen $(\chi, {}^a\chi)_G = 0$ können wir ohne Einschränkung von

$$ {}^a\chi = \epsilon_1\chi_1 - \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_4\chi_4 $$

mit $\chi_4 \in \mathrm{Irr}(B) \backslash \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ und $\epsilon_4 \in \{\pm 1\}$ ausgehen. Offenbar ist ${}^a\chi_2 \neq \chi_2$, denn die zugehörigen Vorzeichen stimmen nicht überein. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

- Zunächst sei ${}^a\chi_2 = \chi_1$. Dann ist $\epsilon_2 = \epsilon_1$. Somit folgen auch ${}^a\chi_1 = \chi_4$, $\epsilon_4 = \epsilon_1$, ${}^a\chi_3 = \chi_2$ und $\epsilon_3 = -\epsilon_2 = -\epsilon_1$. Wegen ${}^{a^2}\chi_3 = {}^a\chi_2 = \chi_1$ ist das Paar $(a^2, 1)$ ebenfalls ein Gegenbeispiel mit $a^2 \neq 1$. Aus der Minimalität der Ordnung von a folgt dann also, dass $\mathrm{ord}(a) \geq 3$ ungerade ist. Wir berechnen:
$$ {}^{a^2}\chi = \epsilon_1\chi_4 - \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_1 {}^a\chi_4. $$
  Wegen ${}^a\chi_3 = \chi_2$ folgt ${}^a\chi_4 \neq \chi_2$. Mit $(\chi, {}^{a^2}\chi)_G = 0 \neq -1$ folgt dann in jedem Fall ${}^a\chi_4 = \chi_3$. Allerdings folgt hieraus $(\chi, {}^{a^2}\chi)_G = -2$, was ein Widerspruch ist. Diese Situation kann also nicht eintreten.
- Nun sei ${}^a\chi_2 = \chi_4$. Dann ist $\epsilon_2 = \epsilon_4$. Wir gehen zunächst von ${}^a\chi_1 = \chi_2$ aus. Dann folgen $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, ${}^a\chi_3 = \chi_1$ und $\epsilon_3 = \epsilon_1$. Wegen ${}^{a^2}\chi_3 = {}^a\chi_1 = \chi_2$ ist das Paar $(a^2, 1)$ ebenfalls ein Gegenbeispiel mit $a^2 \neq 1$. Aus der Minimalität der Ordnung von a folgt wieder, dass $\mathrm{ord}(a) \geq 3$ ungerade ist. Wir berechnen:
$$ {}^{a^2}\chi = \epsilon_1\chi_2 + \epsilon_1\chi_4 - \epsilon_1 {}^a\chi_4. $$
  Wegen ${}^a\chi_3 = \chi_1$ folgt ${}^a\chi_4 \neq \chi_1$. Aus $(\chi, {}^{a^2}\chi)_G = 0 \neq -1$ folgt dann ${}^a\chi_4 = \chi_3$, was wie oben ein Widerspruch ist.

  Somit war unsere Annahme ${}^a\chi_1 = \chi_2$ falsch und der Fall ${}^a\chi_1 = \chi_1$ tritt ein. Es folgen ${}^a\chi_3 = \chi_2$ und $\epsilon_3 = -\epsilon_2$. Ist q ein Primteiler der Ordnung von a, so ist auch ${}^{a^q}\chi_1 = \chi_1$, d.h. aus der Minimalität der Ordnung von a folgt, dass $\mathrm{ord}(a) \neq 3$ eine Primzahl ist. Ist $\mathrm{ord}(a) = 2$, so ist $\chi_3 = {}^{a^2}\chi_3 = {}^a\chi_2 = \chi_4$, was ein Widerspruch ist. Im Fall $\mathrm{ord}(a) > 2$ berechnen wir:
$$ {}^{a^2}\chi = \epsilon_1\chi_1 - \epsilon_2\chi_4 + \epsilon_2 {}^a\chi_4. $$
  Wegen ${}^a\chi_3 = \chi_2$ folgt ${}^a\chi_4 \neq \chi_2$. Mit $(\chi, {}^{a^2}\chi)_G = 0 \neq 1$ folgt dann ${}^a\chi_4 = \chi_3$. Da a also eine Permutation der Ordnung 3 auf $\{\chi_1, \ldots, \chi_4\}$ induziert, ergibt sich aus $\mathrm{ord}(a) \neq 3$ ein Widerspruch.

Wir haben jeden Fall zum Widerspruch geführt. Das zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 1.84. *Ist $r = 3$, so betrachten wir in obiger Situation den Fall $A \cong C_3$. Es seien verschiedene Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(B)$ gegeben. Ein gegebener Erzeuger a von A induziere auf $\{\chi_1, \ldots, \chi_4\}$ die Permutation (χ_2, χ_3, χ_4) (in Zykelschreibweise). Ist dann $\chi := \chi_1 + \chi_2 - \chi_3$, so berechnet man:*

$$ {}^a\chi = \chi_1 + \chi_3 - \chi_4 \qquad \text{und} \qquad {}^{a^2}\chi = \chi_1 + \chi_4 - \chi_2. $$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Forderung an die Ordnung von A in Lemma 1.83 notwendig ist, denn die Operation von A genügt offenbar allen übrigen Voraussetzungen von Lemma 1.83. Die Aussage des Lemmas ist in dieser Situation allerdings falsch.

1.14 Die Cartanmethode

In diesem Unterabschnitt erläutern wir kurz eine Methode zur Berechnung der Cartanmatrix des Blocks B, welche wir mehrfach verwenden werden. Die folgende Beschreibung der Methode findet sich im Wesentlichen in [74, Section 4.2].

Algorithmus 1.85. *Zur Berechnung der gewöhnlichen Zerlegungsmatrix und der Cartanmatrix des Blocks B kann man folgendermaßen vorgehen:*

(1) Bestimme ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen mittels Lemma 1.49!

(2) Berechne die Cartanmatrix C_{b_u} von b_u für jedes $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ bis auf Basiswahl! Hierfür kann die Theorie der dominierten Blöcke angewandt werden.

(3) Bestimme alle Möglichkeiten für d^u für alle B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$! Hierfür muss die Matrixgleichung $(d^u)^T \overline{d^u} = C_{b_u}$ gelöst werden.

(4) Bilde die Matrix $\widetilde{d}$, welche alle Matrizen d^u für $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ enthält!

(5) Finde eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $\{c \in \mathbb{Z}^{k(B)} : \widetilde{d}^T c = 0\}$!

(6) Die $k(B) \times l(B)$-Matrix, welche die Spalten dieser Basis enthält, ist dann die gewöhnliche Zerlegungsmatrix d^1 bis auf Basiswahl.

(7) Wie üblich ist $(d^1)^T d^1$ die Cartanmatrix von B bezüglich derselben Basis.

Dieses Vorgehen ist in der Regel recht aufwändig und erfordert deshalb die Verwendung von Computern. Für große Defektgruppen ist der Aufwand häufig sogar so groß, dass der Einsatz dieses Algorithmus nicht mehr sinnvoll ist. Aus diesen Gründen haben wir in dieser Arbeit weitere Informationen über die Struktur der verallgemeinerten Zerlegungszahlen genutzt und das Verfahren entsprechend angepasst. Wir erläutern zwei solche Modifikationen:

- Bekanntlich operiert $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(B))$ durch $*$-Konstruktion auf $\mathrm{Irr}(B)$. Allgemeiner operiert $A := \mathrm{Irr}(D/F)$ für jede Untergruppe F von D mit $\mathfrak{foc}(B) \le F$ auf $\mathrm{Irr}(B)$. Für $u \notin F$ gilt dann stets
$$\sum_{\alpha \in A} \alpha(u) = 0.$$
Es sei I ein beliebiger A-Orbit und $\chi \in I$ beliebig gegeben. Für $\psi \in I$ gilt dann $d^1(\chi) = d^1(\psi)$, denn alle Charaktere in A haben Grad 1. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf alle $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Spalten gewöhnlicher Zerlegungszahlen. Nun sei c eine beliebige Spalte von ganzen Zahlen, welche durch die Elemente in $\mathrm{Irr}(B)$ indiziert und auf A-Bahnen konstant ist. Ist dann $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ ein B-Element mit $u \notin F$ und ist $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$, so gilt:
$$\sum_{\psi \in I} d^u_\varphi(\psi) c(\psi) = \frac{|I|}{|A|} \sum_{\alpha \in A} d^u_\varphi(\alpha * \chi) c(\alpha * \chi) = \frac{|I|}{|A|} \sum_{\alpha \in A} \alpha(u) d^u_\varphi(\chi) c(\chi) = 0.$$
Eine solche Spalte c ist also bereits zu allen Spalten von Zerlegungszahlen in d^u für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ und $u \notin F$ orthogonal.

  Zur Vereinfachung des obigen Algorithmus können wir also zuerst alle A-Bahnen von $\mathrm{Irr}(B)$ ermitteln und uns anschließend in Schritt (2) bis (4) auf B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ mit $u \in F$ beschränken. Anschließend ermitteln wir in Schritt (5) eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls
$$\{c \in \mathbb{Z}^{k(B)} : \widetilde{d}^T c = 0 \text{ und } c(\chi) = c(\psi) \text{ für } \chi, \psi \in \mathrm{Irr}(B) \text{ mit } \psi \in A * \chi\}.$$

- Die Gruppe $\mathcal{G}$ operiert ebenfalls auf $\operatorname{Irr}(B)$. Diese Operation haben wir in Unterabschnitt 1.11 für $p = 2$ untersucht. Wir beschränken uns auch hier auf diesen Fall. Es sei I eine beliebige $\mathcal{G}$-Bahn von $\operatorname{Irr}(B)$. Weiter sei $\chi \in I$. Für $\psi \in I$ gilt dann $d^1(\chi) = d^1(\psi)$, denn die Zerlegungszahlen in d^1 sind rational. Es sei c eine beliebige Spalte von ganzen Zahlen, welche durch die Elemente in $\operatorname{Irr}(B)$ indiziert und auf $\mathcal{G}$-Bahnen konstant ist. Dann gilt für $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ mit $\operatorname{ord}(u) = 2^k$, $\varphi \in \operatorname{IBr}(b_u)$ und $i \in \{1, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ stets:

$$\begin{aligned}\sum_{\psi \in I} a^u_{\varphi,i}(\psi)c(\psi) &= \frac{|I|}{|\mathcal{G}|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}} a^u_{\varphi,i}({}^\gamma\chi)c({}^\gamma\chi) = \frac{|I|}{2|\mathcal{G}|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}}(a^u_{\varphi,i}({}^\gamma\chi) + a^u_{\varphi,i}({}^{\alpha\cdot\gamma}\chi))c(\chi)\\ &= \frac{|I|}{2|\mathcal{G}|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}} 0\cdot c(\chi) = 0.\end{aligned}$$

  Hierbei sei α der Galois-Automorphismus $\zeta \mapsto \zeta^{2^{k-l-1}+1}$ für $\zeta := \zeta_{2^k}$, wobei $l \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $2^l \mid i$ gewählt ist. Man zeigt leicht, dass dann stets $\alpha(\zeta^i) = -\zeta^i$ gilt, woraus obige Gleichung folgt. Die Spalte c ist also bereits zu den nichtrationalen Parts von Spalten von Zerlegungszahlen in d^u für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ orthogonal.

  Zur Vereinfachung des obigen Algorithmus können wir folglich zuerst die $\mathcal{G}$-Bahnen von Charakteren in $\operatorname{Irr}(B)$ ermitteln. Anschließend können wir uns in den Schritten (3) und (4) auf die Bestimmung von a^u_0 für $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ beschränken. Dann ermitteln wir in (5) eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls

$$\{c \in \mathbb{Z}^{k(B)} : \widetilde{d}^T c = 0 \text{ und } c(\chi) = c(\psi) \text{ für } \chi, \psi \in \operatorname{Irr}(B) \text{ mit } \psi \in {}^{\mathcal{G}}\chi\}.$$

1.15 Morita-Äquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir mit der Morita-Äquivalenz einen Äquivalenzbegriff der Darstellungstheorie ein. Wir nehmen dafür an, dass A und B Gruppenalgebren oder Blöcke über $\mathcal{O}$ sind, obwohl viele Aussagen für allgemeine Algebren wahr sein werden. Wie üblich bezeichnen wir für einen A-Linksmodul M und einen A-Rechtsmodul N das *Tensorprodukt* von M und N mit $M \otimes_A N$. Nun können wir den Begriff der Morita-Äquivalenz definieren.

Definition 1.86. *Ein* Morita-Kontext *ist ein 6-Tupel (A, B, M, N, Φ, Ψ) mit den folgenden Eigenschaften:*

- *M ist ein B-A-Bimodul,*
- *N ist ein A-B-Bimodul,*
- *$\Phi : M \otimes_A N \to B$ ist ein B-B-Bimodulhomomorphismus,*
- *$\Psi : N \otimes_B M \to A$ ist ein A-A-Bimodulhomomorphismus,*
- *für $m, m' \in M$ und $n, n' \in N$ gilt*

$$\Phi(m \otimes n)m' = m\Psi(n \otimes m') \qquad \textit{und} \qquad \Psi(n \otimes m)n' = n\Phi(m \otimes n').$$

Definition 1.87. *Ist (A, B, M, N, Φ, Ψ) ein Morita-Kontext, für den Φ und Ψ surjektiv sind, so sagt man, dass A und B* Morita-äquivalent *sind.*

Gegebenenfalls sind Φ und Ψ sogar bijektiv. Die Abbildungen $P \mapsto M \otimes_A P$ und $Q \mapsto N \otimes_B Q$ induzieren zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Isomorphieklassen von A-Linksmoduln und der Menge der Isomorphieklassen von B-Linksmoduln. Deswegen ist die Darstellungstheorie Morita-äquivalenter Algebren im Wesentlichen identisch. Ist ein p-Block B zu einer Gruppenalgebra $\mathcal{O}H$ einer endlichen Gruppe H Morita-äquivalent, so übertragen sich beispielsweise die folgenden Eigenschaften:

- Die Cartanmatrizen von B und $\mathcal{O}H$ stimmen überein.

- $k(B) = k(H)$ und $k_i(B)$ ist die Anzahl der irreduziblen Charaktere von H, deren Grad die Form $p^i r$ mit $p \nmid r$ hat.
- $l(B) = l(H)$.

Wir geben einige Beispiele für Morita-äquivalente Algebren an.

Beispiel 1.88. *(i) Sind A und B isomorph, so sind sie auch Morita-äquivalent.*

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist A Morita-äquivalent zur Matrixalgebra $A^{n \times n}$.

(iii) Ist B ein nilpotenter Block mit Defektgruppe D, so sind B und $\mathcal{O}D$ nach Satz 1.46 Morita-äquivalent.

(iv) Ist B ein Block mit normaler Defektgruppe D, so ist B nach [47] Morita-äquivalent zu einer sogenannten verschränkten Gruppenalgebra $\mathcal{O}_\gamma[D \rtimes I(B)]$ *mit $\gamma \in H^2(I(B), \mathbb{F}^\times)$. Die Definition einer verschränkten Gruppenalgebra findet sich in [69, 47]. In den für diese Arbeit relevanten Fällen wird γ stets trivial sein. Dann ist die verschränkte Gruppenalgebra $\mathcal{O}_\gamma[D \rtimes I(B)]$ isomorph zur Gruppenalgebra $\mathcal{O}[D \rtimes I(B)]$.*

Für das letzte Beispiel geben wir einige Eigenschaften der *zweiten Kohomologiegruppe* $H^2(H, \mathbb{F}^\times)$ an.

Satz 1.89. *Ist H eine endliche Gruppe, so gelten:*

(i) $H^2(H, \mathbb{F}^\times)$ ist eine endliche p'-Gruppe.

(ii) Ist H eine p-Gruppe, so ist $H^2(H, \mathbb{F}^\times)$ trivial.

(iii) Für zyklisches H ist $H^2(H, \mathbb{F}^\times)$ trivial.

(iv) Gilt für jede Primzahl q und jede q-Sylowgruppe Q von H stets $H^2(Q, \mathbb{F}^\times) = 1$, so ist $H^2(H, \mathbb{F}^\times) = 1$.

2 Problemstellung

In diesem Abschnitt sei B ein p-Block von $\mathcal{O}G$ für eine Primzahl p. Der Block B habe die Defektgruppe D und das Fusionssystem $\mathcal{F}$. Ziel dieser Arbeit wird es sein, die folgenden Blockinvarianten in Abhängigkeit von D und $\mathcal{F}$ zu bestimmen:

- $k(B)$,
- $k_i(B)$ für $i \geq 0$,
- $l(B)$.

Manchmal wird es nötig sein, auch die Cartanmatrix C_B von B zu berechnen. Allerdings wird dies üblicherweise nur bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis möglich sein. Obgleich es für die von uns untersuchten Fälle stets gilt, ist zu beachten, dass im Allgemeinen obige Invarianten nicht eindeutig durch D und $\mathcal{F}$ bestimmt sind (siehe etwa [50, Proposition 2.1]).

Nach der Berechnung der Invarianten können die bekannten Vermutungen der Blocktheorie für diesen Fall verifiziert werden. Wir geben fünf wichtige Beispiele für solche Vermutungen an.

Vermutung 2.1 (Brauers $k(B)$-Vermutung, [11])**.** *Ist B ein Block mit Defektgruppe D, so gilt $k(B) \leq |D|$.*

Vermutung 2.2 (Olsson-Vermutung, [60])**.** *Für einen Block B mit Defektgruppe D gilt $k_0(B) \leq |D : D'|$.*

Vermutung 2.3 (Brauers Höhe-Null-Vermutung, [7])**.** *Ein Block B hat genau dann eine abelsche Defektgruppe, wenn $k(B) = k_0(B)$ ist.*

Eine Richtung dieser Äquivalenz wurde in [42] bewiesen. Die Rückrichtung ist noch offen.

Vermutung 2.4 (Alperin-McKay Vermutung, [1])**.** *Ist B ein Block mit Defektgruppe D und Brauer-Korrespondenten b in $N_G(D)$, so gilt $k_0(B) = k_0(b)$.*

Um schließlich die Gewichts-Vermutung von Alperin formulieren zu können, benötigen wir noch den Begriff des *B-Gewichts*. Sei hierfür P eine p-Untergruppe von G und β ein Block von $\mathcal{O}[N_G(P)/P]$ mit Defekt 0. Es existiert ein eindeutiger Block $b \in \mathrm{Bl}(\mathcal{O}N_G(P))$, der β dominiert. Ist dann B der Brauer-Korrespondent von b in G, so nennt man das Paar (P, β) ein B-Gewicht von G. Durch

$$^g(P, \beta) = (^gP, {}^g\beta)$$

operiert G auf der Menge der B-Gewichte. Hierbei ist $^g\beta$ wie üblich ein Block von $\mathcal{O}[N_G(^gP)/{}^gP]$.

Vermutung 2.5 (Alperins Gewichts-Vermutung, [2])**.** *Für jeden Block B ist $l(B)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von B-Gewichten.*

Zur Überprüfung dieser Vermutung werden wir in dieser Arbeit häufig [39, Proposition 5.4] nutzen, wo eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Konjugationsklassen von B-Gewichten mittels Daten aus dem Fusionssystem gegeben wird.

In den letzten Jahren wurden für mehrere der obigen Vermutungen Reduktionen auf quasi-einfache Gruppen durchgeführt. Beispiele hierfür sind [57, 85, 86]. Ziel solcher Reduktionen ist die anschließende Überprüfung aller Fälle mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

3 Abelsche Erweiterungen von Defektgruppen

Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen der Berechnung von Cartanmatrizen von Blöcken mit Defektgruppen $D_{2^n} \times A$ und $Q_{2^n} \times A$ für $n \geq 3$ gewidmet, wobei A eine abelsche 2-Gruppe ist. Das Fusionssystem der Blöcke habe hierbei die Form $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf D_{2^n} bzw. Q_{2^n} sei. Blöcke dieser Art tauchen in späteren Abschnitten als dominierte Blöcke auf. Die Kenntnis der Cartanmatrix dieser Blöcke ist dann unerlässlich, um gute Abschätzungen für die Anzahl der irreduziblen Charaktere zu erhalten.

3.1 Defektgruppen $D_{2^n} \times A$

In diesem Unterabschnitt bestimmen wir Blockinvarianten und die Cartanmatrix von 2-Blöcken B von G mit Defektgruppe $D := D_{2^n} \times A$ für $n \geq 2$. Hierbei sei A eine beliebige abelsche 2-Gruppe und das Fusionssystem $\mathcal{F}$ habe die Form $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf D_{2^n} ist. Genauer zeigen wir den folgenden Satz.

Satz 3.1. *Es sei B ein Block mit Defektgruppe D und Fusionssystem $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf D_{2^n} ist. Dann ist $k(B) = (2^{n-2}+3)|A|$, $k_0(B) = 4|A|$, $k_1(B) = (2^{n-2}-1)|A|$ und $l(B) \in \{1,2,3\}$ abhängig vom Fusionssystem $\mathcal{F}'$. Ebenfalls abhängig von $\mathcal{F}'$ hat B die Cartanmatrix*

$$|A|(2^n), \qquad |A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad |A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 1 & . & 2 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Ist $n = 2$, so tritt der Fall $l(B) = 2$ mit der zugehörigen Cartanmatrix nicht auf.

Den nilpotenten Fall können wir mit Satz 1.46 behandeln. Gegebenenfalls ist $l(B) = 1$, $k(B) = k(D) = (2^{n-2}+3)|A|$, $k_0(B) = k_1(D) = |D : D'| = 4|A|$ und $|D|$ lässt sich als Summe von $k(B)$ Quadratzahlen schreiben, wobei genau $k_0(B)$ davon gleich 1 sind. Wegen $4|A| + (2^{n-2}-1)|A| \cdot 4 = 2^n|A| = |D|$, folgt $k_1(B) = k_2(D) = (2^{n-2}-1)|A|$ und $k_i(B) = 0$ für $i \geq 2$.

Wir können uns also nun auf den Fall beschränken, in dem $\mathcal{F}'$ und damit $\mathcal{F}$ nicht nilpotent ist. Im Fall $n = 2$ ist D abelsch mit Trägheitsindex 3 und Resultate von Puig und Usami (siehe [87, 66]) liefern eine perfekte Isometrie zwischen B und seinem Brauer-Korrespondenten b in $N_G(D)$. Für die recht komplizierte Definition einer perfekten Isometrie verweisen wir auf [14, 29]. Nach [47] ist b weiter Morita-äquivalent zu einer verschränkten Gruppenalgebra $\mathcal{O}_\gamma[A_4 \times A]$ mit $\gamma \in H^2(C_3, \mathbb{C}^\times) = 1$ (siehe Satz 1.89), d.h. b ist Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra $\mathcal{O}[A_4 \times A]$. Die Behauptung folgt dann elementar. Auch der Grenzfall $A = 1$ wurde bereits in [8, 19] behandelt. Deswegen können wir im Folgenden von $n \geq 3$ und $A > 1$ ausgehen. Schließlich verweisen wir auch auf [76], wo die Blockinvarianten für zyklisches A berechnet wurden.

Im Folgenden gehen wir induktiv davon aus, dass wir Satz 3.1 bereits für alle Blöcke mit Defektgruppe $D_{2^{\tilde{n}}} \times \widetilde{A}$ mit $2 \leq \tilde{n} \leq n$, $|\widetilde{A}| \leq |A|$ und $|D_{2^{\tilde{n}}} \times \widetilde{A}| < |D_{2^n} \times A|$ gezeigt haben. Wir schreiben

$$D = \langle x, y \rangle \times A$$

mit $x^{2^{n-1}} = y^2 = 1$ und $yxy^{-1} = x^{-1}$. Bekanntlich gibt es dann für das Fusionssystem $\mathcal{F}'$ auf $\langle x, y \rangle$ bis auf Äquivalenz genau zwei nichtnilpotente Fälle. Diese unterscheiden sich in der Anzahl von $\mathcal{F}'$-Konjugationsklassen wesentlicher Untergruppen. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $r \in \{1,2\}$.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Hierbei beschränken wir uns für $r = 1$ auf den Fall, in dem $\langle x^{2^{n-2}}, xy \rangle \times A \cong C_2^2 \times A$ wesentlich ist. Der andere Fall verläuft analog.

Lemma 3.2. *Ist $r = 2$, so bilden $(x^i a, b_{x^i a})$ für $a \in A$ und $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Im Fall $r = 1$ kommen noch die B-Elemente (ya, b_{ya}) mit $a \in A$ hinzu. Für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ hat hierbei b_u stets die Defektgruppe $C_D(u)$.*

Beweis. Die Elemente $x^i a$, ya und xya bilden für $a \in A$ und $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ gerade ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von D. Ist $r = 1$, so fusioniert der Automorphismus der Ordnung 3 auf $\langle x^{2^{n-2}}, xy\rangle \times A$ für $a \in A$ jeweils die Konjugationsklassen von $x^{2^{n-2}}a$ und xya. Im Fall $r = 2$ werden diese Konjugationsklassen durch den Automorphismus der Ordnung 3 auf $\langle x^{2^{n-2}}, y\rangle \times A$ zusätzlich jeweils mit der Konjugationsklasse von ya fusioniert. Da die Erzeugnisse der gegebenen Elemente offenbar jeweils vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert sind, folgt die Behauptung nun mit Lemma 1.49. $\square$

Die Bezeichnung $\mathcal{R}$ für das Repräsentantensystem werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden. Nun berechnen wir die Fokalgruppe des Blocks.

Lemma 3.3. *Es ist*

$$\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \langle x^2\rangle & \textit{falls } r = 0, \\ \langle x^2, xy\rangle & \textit{falls } r = 1, \\ \langle x, y\rangle & \textit{falls } r = 2. \end{cases}$$

Beweis. Ist $r = 0$, d.h. $\mathcal{F}$ nilpotent, so gilt bekanntlich $\mathfrak{foc} = D' = \langle x^2\rangle$. Im Fall $r = 1$ sind zusätzlich nach dem Beweis von Lemma 3.2 jeweils für $a \in A$ die Elemente der Form $x^{2^{n-2}}a$ und $x^{2k+1}ya$ für $k \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{F}$ konjugiert. Die Gruppe $\mathfrak{foc}$ wird also erzeugt von x^2 und $x^{2k+1+2^{n-2}}y$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy\rangle$. Für $r = 2$ gilt analog $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy, y\rangle = \langle x, y\rangle$. $\square$

Aus dem letzten Lemma folgt auch, dass stets $\mathrm{Irr}(A)$ als Untergruppe von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ aufgefasst werden kann. Mit Lemma 1.76 ergibt sich dann sogar, dass $\mathrm{Irr}(A)$ frei auf $\mathrm{Irr}(B)$ operiert. Diese Eigenschaft ist der Schlüssel zur Bestimmung der Cartanmatrix von B. Zunächst ermitteln wir jedoch die numerischen Blockinvarianten.

Lemma 3.4. *Olssons Vermutung $k_0(B) \le |D : D'| = 4|A|$ ist erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten das B-Element $(x, b_x) \in \mathcal{R}$. Der Block b_x ist nilpotent mit Defektgruppe $\langle x\rangle \times A$. Da x und x^{-1} via y konjugiert sind, ist $a_0^x(\chi)$ für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ nach Lemma 1.61 ungerade. Das Skalarprodukt (a_0^x, a_0^x) hat nach Proposition 1.57 den Wert $4|A|$. Zusammen ergibt sich $k_0(B) \le 4|A|$. $\square$

Proposition 3.5. *Für die Blockinvarianten gilt stets*

$$k(B) = (2^{n-2} + 3)|A|, \qquad k_0(B) = 4|A| \qquad \textit{und} \qquad k_1(B) = (2^{n-2} - 1)|A|.$$

Zudem ist $l(B) = r + 1$.

Beweis. Zunächst berechnen wir $k(B) - l(B)$ unter Anwendung von Satz 1.50. Für $a \in A \setminus \{1\}$ dominiert b_a einen Block $\overline{b_a} \in \mathrm{Bl}(\mathcal{O}[C_G(a)/\langle a\rangle])$ mit Defektgruppe $D/\langle a\rangle \cong D_{2^n} \times A/\langle a\rangle$. Nach Induktion gilt $l(b_a) = l(\overline{b_a}) = r + 1$. Ist $a \in A$ und $v = x^i$ für $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ oder $v = y$ (für $r = 1$), so sind die Blöcke b_{va} nilpotent. Somit gilt $l(b_{va}) = 1$. Summieren wir nun über alle B-Elemente in Lemma 3.2, so ergibt sich

$$k(B) = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} l(b_u) = l(B) + (|A| - 1)(r + 1) + (2^{n-2} + 2 - r)|A| = l(B) + (2^{n-2} + 3)|A| - r - 1$$

bzw. $k(B) - l(B) = (2^{n-2} + 3)|A| - r - 1$.

Wir betrachten den Block b_a für ein beliebiges $a \in A\setminus\{1\}$. Wegen $a \in Z(\mathcal{F})$ ist $l(B) \ge l(b_a) = r+1$ nach Satz 1.51. Somit ist $k(B) \ge (2^{n-2}+3)|A|$. Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir das

B-Element $(x^{2^{n-2}}, b_{x^{2^{n-2}}})$. Der Block $b_{x^{2^{n-2}}}$ ist nilpotent und wegen $x^{2^{n-2}} \in Z(D)$ verschwindet keine der Zerlegungszahlen $d^{x^{2^{n-2}}}(\chi)$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Wegen $\mathrm{ord}(x^{2^{n-2}}) = 2$ sind diese Zerlegungszahlen ganze Zahlen. Anwendung von Satz 1.64 und Lemma 3.4 ergibt nun

$$2^n \cdot |A| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} d^{x^{2^{n-2}}}(\chi)^2 \geq k_0(B) + 4(k(B) - k_0(B)) \geq 4|A| + 4((2^{n-2}+3)|A| - 4|A|) = 2^n \cdot |A|.$$

Folglich herrscht an jeder Stelle Gleichheit und es folgen $k(B) = (2^{n-2}+3)|A|$, $k_0(B) = 4|A|$ und $k_1(B) = (2^{n-2}-1)|A|$. Wegen $k(B) - l(B) = (2^{n-2}+3)|A| - r - 1$ gilt außerdem $l(B) = r + 1$. □

Proposition 3.5 zeigt auch alle Vermutungen, die wir in Abschnitt 2 aufgelistet haben. Alperins Gewichtsvermutung folgt hierbei wie in [76, Theorem 4.1]. Um nun die Cartanmatrix von B berechnen zu können, benötigen wir zunächst einige Informationen über die Elementarteiler dieser Matrix.

Lemma 3.6. *Die Cartanmatrix von B hat die Elementarteiler $2^n|A|$ und $|A|$. Hierbei tritt der Elementarteiler $|A|$ genau r Mal auf.*

Beweis. Bekanntlich ist $2^n|A| = |D|$ Elementarteiler von C_B und es genügt nach Proposition 3.5, die übrigen r Elementarteiler zu finden. Nach Korollar 1.78 und Lemma 3.3 sind diese zumindest durch $|A|$ teilbar. Es genügt also zu zeigen, dass es für $1 \leq s \leq n-1$ keinen Elementarteiler $2^s|A|$ gibt. Hierfür nutzen wir die Theorie der unteren Defektgruppen. Sei also $Q \leq D$ mit $|Q| = 2^s|A|$ und $m_B^{(1)}(Q) > 0$ gegeben. Wegen $|Q| > |A|$ existieren $a \in A$ und $g \in \langle x, y\rangle \setminus \{1\}$ mit $ag \in Q$. Ist dann b ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(ag)$ mit Ordnung der Defektgruppe größer $|Q|$, so ist b nilpotent und folglich $m_b^{(1)}(Q) = 0$. Nach Proposition 1.53 ist auch $m_B^{(1)}(Q) = 0$. Das ist ein Widerspruch und zeigt die Behauptung. □

Schließlich berechnen wir die Cartanmatrix von B bis auf Basiswahl.

Proposition 3.7. *Es existiert eine $\mathbb{Z}\mathrm{IBr}(B)$-Basis, sodass die Cartanmatrix von B bezüglich dieser Basis die Form*

$$|A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad |A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & . \\ 1 & . & 2 \end{pmatrix}$$

hat.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass nach Lemma 1.76 und Lemma 3.3 $\mathrm{Irr}(A)$ frei auf $\mathrm{Irr}(B)$ operiert. Wir werden uns deshalb im Folgenden auf ein Repräsentantensystem X der Bahnen unter dieser Operation zurückziehen können. Dann befinden sich in X nach Proposition 3.5 genau 4 Charaktere von Höhe 0 und $2^{n-2} - 1$ Charaktere von Höhe 1. Zudem sind die Werte der Zerlegungszahlen d^u zu allen B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle x, y\rangle$ auf den $\mathrm{Irr}(A)$-Bahnen identisch.

Als Erstes betrachten wir nun die Zerlegungszahlen zu $x^{2^{n-2}}$ und x. Wie im Beweis von Proposition 3.5 gilt $d^{x^{2^{n-2}}}(\chi) = \pm 2^{h(\chi)}$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Proposition 1.57 liefert $(a_0^x, a_0^x) = 4|A|$ und $(a_i^x, a_i^x) = 2|A|$ für $1 \leq i \leq 2^{n-3} - 1$. Nach dem Beweis von Lemma 3.4 ist a_0^x für jeden Charakter der Höhe 0 gleich ± 1 und a_0^x verschwindet für alle übrigen Charaktere. Da a_0^x nach Proposition 1.54 orthogonal zu $d^{x^{2^{n-2}}}$ ist, stimmen die Vorzeichen der Höhe 0 Charaktere von X in a_0^x und $d^{x^{2^{n-2}}}$ genau zweimal überein. Wir ordnen die Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4$ der Höhe 0 in X so an, dass dies für χ_1 und χ_3 der Fall ist. Es gibt also Vorzeichen $\delta_1, \ldots, \delta_4$, sodass

$$a_0^x(\chi_j) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } j = 1, \\ -\delta_2 & \text{falls } j = 2, \\ \delta_3 & \text{falls } j = 3, \\ -\delta_4 & \text{falls } j = 4 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d^{x^{2^{n-2}}}(\chi_j) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } j = 1, \\ \delta_2 & \text{falls } j = 2, \\ \delta_3 & \text{falls } j = 3, \\ \delta_4 & \text{falls } j = 4 \end{cases}$$

ist. An dieser Stelle ist zu bemerken, dass wir die Reihenfolge der Charaktere χ_1 und χ_3 sowie χ_2 und χ_4 noch beliebig wählen können (bei gleichzeitiger Umbenennung der Vorzeichen).

Die Einträge von a_i^x auf X sind für $1 \leq i \leq 2^{n-3}-1$ offenbar zweimal ± 1 und überall sonst 0. Da die a_i^x nach Proposition 1.57 und Proposition 1.54 sowohl zueinander als auch zu $d^{x^{2^{n-2}}}$ orthogonal sind, nehmen die a_i^x ihre nichtverschwindenden Werte auf verschiedenen Charakteren an. Insgesamt gibt es in X also genau fünf Charaktere, auf denen alle a_i^x für $1 \leq i \leq 2^{n-3}-1$ verschwinden. Wir zeigen, dass dies für $\chi_1, \ldots, \chi_4$ und einen Charakter ψ_0 von Höhe 1 zutrifft. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $d^x(\chi_j) = a_0^x(\chi_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, 4\}$ gilt. Wir nehmen an, dass dies für ein χ_j nicht der Fall ist. Dann existiert nach Lemma 1.58 ein $m \in \{1, \ldots, 2^{n-3}-1\}$ mit $d^x(\chi_j) = \pm 1 \pm (\zeta_{2^{n-1}}^m + \zeta_{2^{n-1}}^{-m})$. Bezeichnen wir mit μ_A den regulären Charakter von A, so ist bekanntlich $\mu_A = \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(A)} \mu$ und somit $\mu_A * \chi_j$ eine Summe von $|A|$ verschiedenen Charakteren von Höhe 0, d.h. $(\mu_A * \chi_j, \mu_A * \chi_j)_G = |A|$. Der Beitrag des B-Elements (x, b_x) zu diesem Skalarprodukt ist dann

$$\frac{1}{2^{n-1}|A|} d^x(\chi_j)\overline{d^x(\chi_j)}|A|^2 = \frac{|A|}{2^{n-1}}\left(3 + \sum_{s=1}^{2^{n-2}-1} \alpha_s \zeta_{2^{n-1}}^s\right)$$

für ganze Koeffizienten α_s. Summieren wir die Beiträge aller B-Elemente (x^t, b_x) für ungerades t, so ergibt sich die Summe $\frac{3|A|}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-3} = \frac{3}{4}|A|$. Da $a_0^{x^t}(\chi_j)$ nach Lemma 1.61 für beliebige $t \in \{1, \ldots, 2^{n-1}-1\}$ nicht verschwindet, ist der Beitrag der übrigen B-Elemente dieser Form analog mindestens $\frac{|A|}{4} - \frac{|A|}{2^n}$. Die Summe der Beiträge der bisher betrachteten B-Elemente zum Skalarprodukt $(\mu_A * \chi_j, \mu_A * \chi_j)_G$ ist folglich mindestens $|A| - \frac{|A|}{2^n}$. Der Beitrag von $(1, B)$ ist mindestens $\frac{|A|}{2^n}$ und somit genau $\frac{|A|}{2^n}$. Folglich ist $m^1_{\chi_j\chi_j} = \frac{1}{2^n|A|}$.

Wir betrachten die Beitragsmatrix $d^1 C_B^{-1}(d^1)^T$ und setzen $M := d^1(2^n|A|C_B^{-1})(d^1)^T$. Diese Matrix ist wie $2^n|A|C_B^{-1}$ eine symmetrische ganzzahlige Matrix. Betrachten wir die zugehörigen quadratischen Formen, so haben wir soeben gezeigt, dass die quadratische Form zu M die Zahl 1 darstellen kann. Das gilt folglich auch für die quadratische Form zu $2^n|A|C_B^{-1}$. Es existiert also eine Matrix $V \in \mathrm{GL}(l(B), \mathbb{Z})$, sodass $2^n|A|VC_B^{-1}V^T$ direkte Summe von (1) und einer Matrix aus $\mathrm{Mat}(l(B)-1, l(B)-1, \mathbb{Z})$ ist. Die Matrix $(V^T)^{-1}C_BV^{-1}$ ist folglich direkte Summe von $(2^n|A|)$ und einer Matrix aus $\mathrm{Mat}(l(B)-1, l(B)-1, \mathbb{Z})$ und somit zerlegbar. Das widerspricht allerdings Lemma 3.6 und Proposition 1.80. Dieser Widerspruch zeigt, dass die a_i^x für $1 \leq i \leq 2^{n-3}-1$ genau auf $\chi_1, \ldots, \chi_4$ und einem ψ_0 verschwinden.

Sei nun $\chi \in X$ ein Charakter, für den a_i^x für ein $i \in \{1, \ldots, 2^{n-3}-1\}$ nicht verschwindet, so ist nach Lemma 1.58 $d^x(\chi) = \pm(\zeta_{2^{n-1}}^i + \zeta_{2^{n-1}}^{-i})$. Die Bahn von χ unter der Operation von $\mathcal{G}$ enthält folglich mindestens 2^{n-e-3} viele verschiedene Einträge auf d^x, wobei e die Vielfachheit von 2 in der Primfaktorzerlegung von i ist. Da $\mathrm{Irr}(A)$ die Zerlegungszahlen d^u zu B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle x, y \rangle$ invariant lässt, zerfallen die Charaktere von Höhe 1 in X in disjunkte Familien $F_0 = \{\psi_0\}, F_1, \ldots, F_{n-3}$ mit $|F_j| = 2^j$, wobei die Charaktere in den Familien jeweils auf den rationalen Teil der Zerlegungszahlen zu Elementen in $\langle x, y \rangle$ konstant sind. Insbesondere sind also die Zerlegungszahlen in $d^{x^{2^{n-2}}}$ auf den Familien konstant und es gibt Vorzeichen $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-3}$ mit $d^{x^{2^{n-2}}}(\chi) = 2\epsilon_j$ für $\chi \in F_j$ und $0 \leq j \leq n-3$.

Wir bestimmen nun $a_0^{x^{2^s}}$ für $1 \leq s \leq n-3$. Hierfür können wir von $n \geq 4$ ausgehen. Induktiv werden wir

$$a_0^{x^{2^s}}(\chi) = \begin{cases} \delta_i & \text{falls } \chi = \chi_i \text{ und } 1 \leq i \leq 4, \\ 2\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq s-2, \\ -2\epsilon_{s-1} & \text{falls } \chi \in F_{s-1}, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst} \end{cases}$$

nach einer geeigneten Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x^{2^s}})$-Basis zeigen. Wir nehmen also stets an, dass wir die obige Gestalt für alle $s' < s$ bereits gezeigt haben. Für den Beweis werden wir wiederholt Proposition 1.57 und Proposition 1.54 benutzen und dies nicht explizit erwähnen.

Es ist $(a_0^{x^{2^s}}, a_0^{x^{2^s}}) = 2^{s+2}|A|$. Für $s = 1$ ist dieses Skalarprodukt also gleich $8|A|$. Anwendung von Lemma 1.61 liefert, dass $a_0^{x^{2^s}}$ auf Höhe 0 Charakteren den Wert ± 1 und auf einem Höhe 1 Charakter den Wert ± 2 annimmt. Aus der Struktur der F_j folgt, dass letzteres für ψ_0 der Fall ist. Da $a_0^{x^2}$ orthogonal zu $d^{x^{2^{n-2}}}$ ist, folgt nun nach eventueller Abänderung der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x^2})$-Basis (um das Vorzeichen aller Einträge umzukehren), dass die obige Behauptung für $s = 1$ erfüllt ist.

Sei nun also $s \geq 2$. Da ungerade Quadratzahlen kongruent zu 1 modulo 8 sind, 2^{s+2} aber durch 8 teilbar ist, ergibt sich $a_0^{x^{2^s}}(\psi_0) \equiv 2 \pmod 4$ aus der Struktur der F_j. Es sei $j_{\max}$ maximal gewählt, sodass die Einträge von $a_0^{x^{2^s}}$ in $F_{j_{\max}}$ nicht verschwinden. Sicher ist $j_{max} < s$. Zudem ist $a_0^{x^{2^s}}$ orthogonal zu $d^{x^{2^{n-2}}} - a_0^{x^{2^{s-1}}}$. Nach Induktion verschwindet die Differenz $d^{x^{2^{n-2}}} - a_0^{x^{2^{s-1}}}$ auf $\chi_1, \ldots, \chi_4$ und auf F_j für $j < s-2$. Auf F_{s-2} ergibt sich der Eintrag $4\epsilon_{s-2}$ und auf allen übrigen F_j ist der Wert $2\epsilon_j$. Nimmt $a_0^{x^{2^s}}$ also auf F_{s-2} oder F_{s-1} Werte an, so ist der Wert auf beiden Familien ± 2 und nach eventueller Neuwahl der Basis ist $a_0^{x^{2^s}}(\chi) = -2\epsilon_{s-1}$ für $\chi \in F_{s-1}$ und $a_0^{x^{2^s}}(\chi) = 2\epsilon_{s-2}$ für $\chi \in F_{s-2}$. Analoge Betrachtungen für $d^{x^{2^{n-2}}} - a_0^{x^{2^t}}$ und $s-2 \geq t \geq 1$ liefern $a_0^{x^{2^s}}(\chi) = 2\epsilon_{t-1}$ für $\chi \in F_{t-1}$. Ausnutzung der Orthogonalität zu $d^{x^{2^{n-2}}}$ ergibt nun die gewünschte Form für $a_0^{x^{2^s}}$. Es verbleibt der Fall $j_{\max} < s - 2$. Dann betrachten wir die Differenz $d^{x^{2^{n-2}}} - a_0^{x^{2^{j_{\max}+1}}}$ und erhalten einen Widerspruch bei der Orthogonalität zu $a_0^{x^{2^s}}$. Dieser Widerspruch beendet die Analyse von $a_0^{x^{2^s}}$.

Ist $r = 1$, so untersuchen wir noch die Zerlegungszahlen in d^y. Es ist $(d^y, d^y) = 4|A|$ und wegen der Orthogonalität zu a_0^x und $d^{x^{2^{n-2}}}$ gilt nach eventueller Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_y)$-Basis und nach eventueller Umsortierung der Paare χ_1 und χ_3 oder χ_2 und χ_4

$$d^y(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ -\delta_2 & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ -\delta_3 & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ \delta_4 & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nach dieser Untersuchung können wir die Struktur der gewöhnlichen Zerlegungszahlen bis auf eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basiswahl bestimmen. Wir nutzen hierfür den Algorithmus aus Unterabschnitt 1.14. Sei c eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Spalten von gewöhnlichen Zerlegungszahlen. Die Spalte c ist dann für $n-3 \geq s \geq 1$ orthogonal zu $d^{x^{2^{n-2}}} - a_0^{x^{2^s}}$. Analog zu obiger Analyse von $a_0^{x^{2^s}}$ ergibt sich dabei, dass ein $\widetilde{c} \in \mathbb{Z}$ mit

$$c(\chi) = \begin{cases} \widetilde{c}\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq n-4, \\ -\widetilde{c}\epsilon_{n-3} & \text{falls } \chi \in F_{n-3} \end{cases}$$

existiert. Zudem gilt $\sum_{i=1}^4 \delta_i c(\chi_i) = 2\widetilde{c}$. Nach Orthogonalität zu a_0^x gilt

$$\delta_1 c(\chi_1) - \delta_2 c(\chi_2) + \delta_3 c(\chi_3) - \delta_4 c(\chi_4) = 0$$

und im Fall $r = 1$ ergibt Orthogonalität zu d^y die Gleichung

$$\delta_1 c(\chi_1) - \delta_2 c(\chi_2) - \delta_3 c(\chi_3) + \delta_4 c(\chi_4) = 0.$$

Die Spalten von d^1 bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls aller Spalten von ganzen Zahlen, die mit $\mathrm{Irr}(B)$ indiziert sind und zu allen Spalten von nichtgewöhnlichen verallgemeinerten Zerlegungszahlen orthogonal sind. Im Fall $r = 1$ hat d^1 also bis auf Basiswahl die Gestalt

$$d^1(\chi) = \begin{cases} (0, \delta_1) & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ (0, \delta_2) & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ (-\delta_3, -\delta_3) & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ (-\delta_4, -\delta_4) & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ (-\epsilon_j, 0) & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \le j \le n-4, \\ (\epsilon_{n-3}, 0) & \text{falls } \chi \in F_{n-3}. \end{cases}$$

Im Fall $r = 2$ ergibt sich (wiederum bis auf Basiswahl) die Gestalt

$$d^1(\chi) = \begin{cases} (0, \delta_1, 0) & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ (0, 0, \delta_2) & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ (-\delta_3, -\delta_3, 0) & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ (-\delta_4, 0, -\delta_4) & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ (-\epsilon_j, 0, 0) & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \le j \le n-4, \\ (\epsilon_{n-3}, 0, 0) & \text{falls } \chi \in F_{n-3}. \end{cases}$$

Aus der Gestalt von d^1 folgt nun jeweils leicht die behauptete Gestalt der Cartanmatrix relativ zu denselben $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basen.

Abschließend ist zu bemerken, dass die hier angegebenen Spalten auch zu sämtlichen Spalten von Zerlegungszahlen zu d^u für $u \notin \langle x, y\rangle$ und auch zu den nichtrationalen Parts der Zerlegungszahlen zu d^u für $u \in \langle x, y\rangle$ orthogonal sind. Dies folgt mit den Bemerkungen in Unterabschnitt 1.14. $\square$

3.2 Defektgruppen $Q_{2^n} * A$

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir Blockinvarianten von 2-Blöcken B von G mit Defektgruppe $D := Q_{2^n} * A$, wobei $n \ge 3$ und A eine beliebige nichttriviale abelsche 2-Gruppe ist. Das Zentralprodukt $Q_{2^n} * A$ ist hierbei als beliebiger Quotient $(Q_{2^n} \times A)/\langle qa\rangle$ mit $q \in Z(Q_{2^n}) \setminus \{1\}$ und $a \in A \setminus \{1\}$ zu verstehen.

Wir bringen diese Gruppen zunächst in eine für uns angenehmere Form. Hierfür sei $\widetilde{a} \in A/\langle a^2\rangle$ gegeben, sodass $\langle \widetilde{a}\rangle$ ein Komplement in $A/\langle a^2\rangle$ besitzt und sodass ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a\langle a^2\rangle = \widetilde{a}^k$ existiert. Wir finden ein solches Element nach dem Klassifikationssatz endlich erzeugter abelscher Gruppen. Bezeichnen wir mit k_2 die größte Potenz von 2, die Teiler von k ist, so sieht man nun leicht, dass $(Q_{2^n} \times A)/\langle qa\rangle \cong (Q_{2^n} * C_{2k_2}) \times (A/\langle a^2\rangle)/\langle \widetilde{a}\rangle$ ist. Hierbei ist $Q_{2^n} * C_{2k_2}$ der Quotient von $Q_{2^n} \times C_{2k_2}$ nach der Untergruppe der Ordnung 2, die in keinem der beiden Faktoren enthalten ist. Man zeigt weiter leicht $Q_{2^n} * C_2 \cong Q_{2^n}$. Den zugehörigen Fall $D \cong Q_{2^n} \times A$ behandeln wir in Unterabschnitt 3.3.

Wir gehen also im Folgenden von $D \cong (Q_{2^n} * C_{2^m}) \times A$ für ein $m \ge 2$ und eine abelsche 2-Gruppe A aus. In diesem Abschnitt behandeln wir zudem nur die Fälle, in denen das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B die Form $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$ hat, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf $Q_{2^n} * C_{2^m}$ ist. Wir schreiben

$$D = \langle x, y, z\rangle \times A$$

mit $x^{2^{n-1}} = 1$, $x^{2^{n-2}} = y^2 = z^{2^{m-1}}$, $yxy^{-1} = x^{-1}$ und $[x, z] = [y, z] = 1$. Es ist zu bemerken, dass die Untergruppe $\langle x, yz^{2^{m-2}}\rangle$ isomorph zu einer Diedergruppe D_{2^n} ist. Somit ist $\langle x, y, z\rangle \cong D_{2^n} * C_{2^m}$ und wir können Resultate aus [75] verwenden, wo der Fall $A = 1$ behandelt wurde. Dort sind in [75, Lemma 2.2] auch alle Möglichkeiten für $\mathcal{F}'$ aufgelistet.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $r \in \{0, 1, 2\}$ die Anzahl der $\mathcal{F}'$-Konjugationsklassen von wesentlichen Untergruppen. Abweichend davon setzen wir $r = 2$ im nichtnilpotenten Fall für $n = 3$. Im

Fall $r = 1$ gehen wir ohne Einschränkung davon aus, dass die Untergruppe $\langle x^{2^{n-3}}, xy, z\rangle \times A \cong (Q_8 * C_{2^m}) \times A$ wesentlich ist. Der andere Fall verläuft analog.

Lemma 3.8. *Ist $r = 2$, so bilden $(x^i z^j a, b_{x^i z^j a})$ für*

$$a \in A, \quad i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\} \quad \textit{und} \quad j \in \{0, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$$

ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Im Fall $r = 1$ kommen noch die B-Elemente $(yz^j a, b_{ya})$ mit $a \in A$ und $j \in \{0, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$ hinzu. Für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ hat b_u stets die Defektgruppe $C_D(u)$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Analyse von $\mathcal{F}'$-Bahnen auf $\langle x, y, z\rangle$, welche in [75, Lemma 2.5] durchgeführt wurde. Zu beachten ist lediglich die unterschiedliche Wahl des Erzeugers y. $\square$

Die Bezeichnung für das Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ aus Lemma 3.8 werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz benutzen. Nun berechnen wir die Gestalt der Fokalgruppe.

Lemma 3.9. *Es ist*

$$\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \langle x^2\rangle & \textit{falls } r = 0, \\ \langle x^2, xy\rangle & \textit{falls } r = 1, \\ \langle x, y\rangle & \textit{falls } r = 2. \end{cases}$$

Beweis. Ist $r = 0$ bzw. $\mathcal{F}$ nilpotent, so gilt bekanntlich $\mathfrak{foc} = D' = \langle x^2\rangle$. Ist $r = 1$, so sind zusätzlich nach [75, Lemma 2.2] jeweils für $j \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ die Elemente der Form $x^{2^{n-3}} z^j a$ und $x^{2k+1} yz^j a$ für $k \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{F}$ konjugiert. Die Gruppe $\mathfrak{foc}$ wird also erzeugt von x^2 und $x^{2k+1-2^{n-3}} y$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy\rangle$. Für $r = 2$ und $n \geq 4$ gilt analog $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Im Fall $n = 3$ und $r = 2$ rechnet man das Resultat ebenfalls leicht nach. $\square$

Die Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf $\mathrm{Irr}(B)$ erlaubt uns nun die Berechnung der numerischen Blockinvarianten.

Lemma 3.10. *Olssons Vermutung $k_0(B) \leq |D : D'| = 2^{m+1}|A|$ ist erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten das B-Element (x, b_x). Der Block b_x ist nilpotent mit Defektgruppe $\langle x, z\rangle \times A$. Da x und x^{-1} via y konjugiert sind, liefert Lemma 1.61, dass $a_0^x(\chi)$ für Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ ungerade ist. Nach Proposition 1.57 gilt $(a_0^x, a_0^x) = 2^{m+1}|A|$. Zusammen folgt die Behauptung. $\square$

Satz 3.11. *Es sei B ein Block mit Defektgruppe D und Fusionssystem $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf $Q_{2^n} * C_{2^m}$ ist. Dann ist $l(B) = r + 1$ und $k_0(B) = 2^{m+1}|A|$. Die übrigen Blockinvarianten von B haben die folgende Gestalt.*

(i) Ist $r = 0$, so ist $k(B) = (2^{n-2} + 3) \cdot 2^{m-1}|A|$ und $k_1(B) = (2^{n-2} - 1) \cdot 2^{m-1}|A|$.

(ii) Ist $r = 1$ und $n \geq 4$, so ist $k(B) = (2^{n-2} + 4) \cdot 2^{m-1}|A|$, $k_1(B) = (2^{n-2} - 1) \cdot 2^{m-1}|A|$ und $k_{n-2}(B) = 2^{m-1}|A|$.

(iii) Ist $r = 2$ und $n = 3$, so ist $k(B) = 7 \cdot 2^{m-1}|A|$ und $k_1(B) = 3 \cdot 2^{m-1}|A|$.

(iv) Ist $r = 2$ und $n \geq 4$, so ist $k(B) = (2^{n-2} + 5) \cdot 2^{m-1}|A|$, $k_1(B) = (2^{n-2} - 1) \cdot 2^{m-1}|A|$ und $k_{n-2}(B) = 2^m|A|$.

Beweis. Im Fall $r = 0$ ist B nilpotent. Nach Satz 1.46 ist $k_0(B) = |D : D'| = 2^{m+1}|A|$ und $k(B) = k(D) = 2^{m-1}|A|(2^{n-2} + 3)$. Weiter ist die Zahl $|D| = 2^{m+n-1}|A|$ eine Summe von $k(D)$ Quadratzahlen, wobei genau $|D : D'|$ davon 1 sind. Wegen $2^{m+1}|A| + 4 \cdot 2^{m-1}|A|(2^{n-2} - 1) = |D|$ folgt $k_1(B) = 2^{m-1}|A|(2^{n-2} - 1)$ und $k_i(B) = 0$ für $i \geq 2$.

In den Fällen $r \in \{1, 2\}$ schätzen wir zunächst $k(B)$ unter Verwendung von Satz 1.50 ab. Ist $u = x^i z^j a$ oder $u = yz^j a$ (für $r = 1$) mit $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$, $j \in \{0, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$ und $a \in A$, so ist b_u offenbar nilpotent und $l(b_u) = 1$. Für B-Elemente (u, b_u) mit $u = z^j a$ für $j \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$

und $a \in A$ gilt $u \in Z(D)$, d.h. b_u ist ein Block mit Defektgruppe D. Nach [75, Lemma 2.3] stimmen hierbei die Werte von r für die Blöcke B und b_u überein. Es ist $z \in Z(\mathcal{F}_D(b_u))$. Ist (z, c_z) das zugehörige b_u-Element, so dominiert c_z einen Block $\overline{c_z}$ von $C_G(\langle u, z\rangle)/\langle z\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle z\rangle \cong D_{2^{n-1}} \times A$ und es gilt $l(\overline{c_z}) = l(c_z)$. Blöcke mit Defektgruppe $D_{2^{n-1}} \times A$ haben wir in Unterabschnitt 3.1 behandelt. Wiederum stimmen hierbei die Werte von r für c_z und $\overline{c_z}$ überein und Proposition 3.5 liefert $l(\overline{c_z}) = r + 1$. Nach Satz 1.51 gilt weiter $l(c_z) \leq l(b_u)$. Insgesamt folgen $l(B) \geq r + 1$ und

$$\begin{aligned} k(B) &\geq (2^{n-2} - 1) \cdot 2^{m-1}|A| + (2 - r) \cdot 2^{m-1}|A| + (r + 1) \cdot 2^m|A| \\ &= (2^{n-2} + 3 + r) \cdot 2^{m-1}|A|. \end{aligned}$$

Gilt hierbei für $k(B)$ Gleichheit, so tritt auch für $l(B)$ der Gleichheitsfall ein. Für eine obere Abschätzung von $k(B)$ betrachten wir das B-Element (u, b_u) für $u := x^{2^{n-2}}$. Der Block b_u dominiert einen Block $\overline{b_u}$ von $C_G(u)/\langle u\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle u\rangle \cong D_{2^{n-1}} \times C_{2^{m-1}} \times A$. Wie oben stimmen wieder die Werte von r für die Blöcke b_u und $\overline{b_u}$ überein und es ergibt sich aus Proposition 3.7 die Cartanmatrix C_{b_u} von b_u der Gestalt

$$2^{m-1}|A| \begin{pmatrix} 2^{n-2} + 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad 2^{m-1}|A| \begin{pmatrix} 2^{n-2} + 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & . \\ 2 & . & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden nun nach der Gestalt dieser Matrix bzw. nach $r \in \{1, 2\}$. Jede $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn in $\mathrm{Irr}(B)$ hat nach Lemma 1.76 eine Länge, die durch $f := |Z(D) : Z(D) \cap \mathfrak{foc}|$ teilbar ist. Nach der Berechnung von $\mathfrak{foc}$ in Lemma 3.9 gilt in beiden Fällen $f = 2^{m-1}|A|$. Die Zerlegungszahlen $d^u(\chi)$ der Charaktere aus $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ sind wegen $u \in \mathfrak{foc}$ auf den $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen identisch. Wir können also auf $\mathrm{Irr}(B)$ eine Äquivalenzrelation definieren, sodass die Äquivalenzklassen sämtlich die Länge f haben und sodass die Zerlegungszahlen $d^u(\chi)$ auf den Äquivalenzklassen identisch sind. Mit X bezeichnen wir ein Repräsentantensystem einer solchen Äquivalenzrelation.

Sei zuerst $r = 1$. Wir bezeichnen die zwei irreduziblen Brauer-Charaktere von b_u mit φ_1 und φ_2. Betrachten wir die Beitragsmatrix $M^u = (m^u_{\chi\psi})_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)} = d^u C_{b_u}^{-1} (d^u)^T$, so ergibt sich

$$2^{n+m-1}|A| m^u_{\chi\psi} = 4 d^u_{\varphi_1}(\chi) d^u_{\varphi_1}(\psi) - 2(d^u_{\varphi_1}(\chi) d^u_{\varphi_2}(\psi) + d^u_{\varphi_2}(\chi) d^u_{\varphi_1}(\psi)) + (2^{n-3} + 1) d^u_{\varphi_2}(\chi) d^u_{\varphi_2}(\psi).$$

Hierbei ist zu beachten, dass wegen $u^2 = 1$ alle auftauchenden Zerlegungszahlen ganze Zahlen sind. Nach Satz 1.64 hat $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0, wenn $2^{n+m-1}|A| m^u_{\chi\chi}$ ungerade ist. Das ist genau dann erfüllt, wenn $d^u_{\varphi_2}(\chi)$ ungerade ist. Wegen Lemma 3.10 ist dies für maximal 4 Charaktere in X der Fall. Unter den Zerlegungszahlen $d^u_{\varphi_2}(\chi)$ taucht für $\chi \in X$ also mindestens einmal eine ± 2 auf. Andererseits liegen in X wegen $k(B) \geq (2^{n-2} + 4) \cdot 2^{m-1}|A|$ wenigstens $2^{n-2} + 4$ Charaktere und bekanntlich verschwindet wegen $u \in Z(D)$ keine Zeile von d^u vollständig. Schränken wir d^u auf die Charaktere in X ein, so erzwingen diese beiden Restriktionen die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \ldots & \pm 1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 \\ . & \ldots & . & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 2\delta_5 \end{pmatrix}^T$$

für Vorzeichen $\delta_1, \ldots, \delta_5$. Es folgt $k(B) = (2^{n-2} + 4) \cdot 2^{m-1}|A|$. Insbesondere ist an jeder Stelle obiger Abschätzung von $k(B)$ Gleichheit gegeben und somit $l(B) = 2$. Berechnet man nun noch die Beiträge $m^u_{\chi\psi}$ für $\chi, \psi \in X$, so folgen mit Satz 1.64 die Höhen der Charaktere.

Sei nun $r = 2$. Wir gehen analog vor. Die irreduziblen Brauer-Charaktere von b_u seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Betrachtet man wieder die Beitragsmatrix $M^u = (m^u_{\chi\psi})_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2^{n+m-1}|A| m^u_{\chi\psi} = {} & 4 d^u_{\varphi_1}(\chi) d^u_{\varphi_1}(\psi) + (2^{n-2} + 1)(d^u_{\varphi_2}(\chi) d^u_{\varphi_2}(\psi) + d^u_{\varphi_3}(\chi) d^u_{\varphi_3}(\psi)) \\ & - 2(d^u_{\varphi_1}(\chi) d^u_{\varphi_2}(\psi) + d^u_{\varphi_2}(\chi) d^u_{\varphi_1}(\psi) + d^u_{\varphi_1}(\chi) d^u_{\varphi_3}(\psi) + d^u_{\varphi_3}(\chi) d^u_{\varphi_1}(\psi)) \\ & + d^u_{\varphi_2}(\chi) d^u_{\varphi_3}(\psi) + d^u_{\varphi_3}(\chi) d^u_{\varphi_2}(\psi). \end{aligned}$$

Ein Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ hat also analog zu oben genau dann Höhe 0, wenn $d^u_{\varphi_2}(\chi) + d^u_{\varphi_3}(\chi)$ ungerade ist. Dies trifft nach Lemma 3.10 auf höchstens 4 der Charaktere aus X zu. Gleichzeitig gibt es in X wegen $k(B) \ge (2^{n-2}+5)\cdot 2^{m-1}|A|$ wenigstens $2^{n-2}+5$ Charaktere. Die zugehörigen Einträge in d^u verschwinden wieder nicht. Schränken wir d^u auf die Charaktere in X ein, so ergibt sich aus diesen Bedingungen leicht die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \ldots & \pm 1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 & . \\ . & \ldots & . & \delta_1 & . & \delta_3 & . & \delta_5 & \delta_6 \\ . & \ldots & . & . & \delta_2 & . & \delta_4 & \delta_5 & -\delta_6 \end{pmatrix}^T$$

für Vorzeichen $\delta_1, \ldots, \delta_6$. Wie im Fall $r = 1$ folgen die exakten Werte für $l(B)$, $k(B)$ und $k_i(B)$ für $i \ge 0$. □

Aus Satz 3.11 ergibt sich, dass alle Vermutungen aus Abschnitt 2 für den Block B erfüllt sind. Der Beweis der Gewichtsvermutung von Alperin verläuft hierbei wie bei Sambale [75, Theorem 4.1].

3.3 Defektgruppen $Q_{2^n} \times A$

In diesem Unterabschnitt bestimmen wir Blockinvarianten und die Cartanmatrix von 2-Blöcken B von G mit Defektgruppe $D := Q_{2^n} \times A$, wobei $n \ge 3$ und A eine beliebige abelsche 2-Gruppe ist. Das Fusionssystem habe die Form $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$ für ein beliebiges Fusionssystem $\mathcal{F}'$ auf Q_{2^n}. Wir zeigen den folgenden Satz.

Satz 3.12. *Es sei B ein Block mit Defektgruppe D und Fusionssystem $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf Q_{2^n} ist. Dann ist $k_0(B) = 4|A|$ und abhängig von $\mathcal{F}'$ tritt einer der folgenden Fälle auf:*

(i) B ist nilpotent, $l(B) = 1$, $k(B) = (2^{n-2}+3)|A|$ und $k_1(B) = (2^{n-2}-1)|A|$.

(ii) $n \ge 4$, $l(B) = 2$, $k(B) = (2^{n-2}+4)|A|$, $k_1(B) = (2^{n-2}-1)|A|$ und $k_{n-2}(B) = |A|$.

(iii) $n = 3$, $l(B) = 3$, $k(B) = 7|A|$ und $k_1(B) = 3|A|$.

(iv) $n \ge 4$, $l(B) = 3$, $k(B) = (2^{n-2}+5)|A|$, $k_1(B) = (2^{n-2}-1)|A|$ und $k_{n-2}(B) = 2|A|$.

Ebenfalls abhängig von $\mathcal{F}'$ hat B dann die Cartanmatrix

$$|A|(2^n), \qquad |A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad |A|\begin{pmatrix} 2^{n-2}+2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & . \\ 2 & . & 4 \end{pmatrix}$$

bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis. Ist $n = 3$, so tritt der Fall $l(B) = 2$ mit der zugehörigen Cartanmatrix nicht auf.

Der Grenzfall $A = 1$ wurde bereits in [60, 19] behandelt. Wir verweisen auch auf [77], wo die Blockinvarianten für zyklisches A berechnet wurden.

Im Folgenden gehen wir induktiv davon aus, dass wir Satz 3.12 bereits für alle Blöcke mit Defektgruppe $Q_{2^n} \times \widetilde{A}$ mit $\widetilde{A} < A$ gezeigt haben. Den Anfang dieser Induktion bilden [60, 19]. Wir schreiben

$$D = \langle x, y\rangle \times A$$

mit $x^{2^{n-1}} = 1$, $x^{2^{n-2}} = y^2$ und $yxy^{-1} = x^{-1}$. Bekanntlich (vgl. [21, Theorem 5.3]) gibt es dann für das Fusionssystem $\mathcal{F}'$ auf $\langle x, y\rangle$ für $n \ge 4$ bis auf Äquivalenz genau drei Fälle. Diese unterscheiden sich in der Anzahl $r \in \{0, 1, 2\}$ von Konjugationsklassen $\mathcal{F}'$-wesentlicher Untergruppen. Für $n = 3$ gibt es nur zwei Fälle. Im nichtnilpotenten dieser Fälle setzen wir abweichend $r = 2$.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Hierbei beschränken wir uns für $r = 1$ auf den Fall, in dem $\langle x^{2^{n-3}}, xy\rangle \times A \cong Q_8 \times A$ wesentlich ist.

Lemma 3.13. *Ist $r = 2$, so bilden $(x^i a, b_{x^i a})$ für $a \in A$ und $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Im Fall $r = 1$ kommen noch die B-Elemente (ya, b_{ya}) mit $a \in A$ hinzu. Für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ hat hierbei b_u stets die Defektgruppe $C_D(u)$.*

Beweis. Für $n = 3$ folgt dieses Resultat unmittelbar aus der Operation eines Automorphismus der Ordnung 3 auf Q_8. Sei nun also $n \geq 4$. Die Elemente $x^i a$, ya und xya bilden für $a \in A$ und $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ gerade ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von D. Ist $r = 1$, so fusioniert der Automorphismus der Ordnung 3 auf $\langle x^{2^{n-3}}, xy \rangle \times A$ für $a \in A$ jeweils die Konjugationsklassen von $x^{2^{n-3}} a$ und xya. Im Fall $r = 2$ werden diese Konjugationsklassen durch den Automorphismus der Ordnung 3 auf $\langle x^{2^{n-3}}, y \rangle \times A$ zusätzlich jeweils mit der Konjugationsklasse von ya fusioniert. Da die gegebenen Elemente offenbar jeweils vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert sind, folgt die Behauptung nun mit Lemma 1.49. □

Die Bezeichnung $\mathcal{R}$ für das Repräsentantensystem in Lemma 3.13 werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz benutzen. Wieder berechnen wir die Form der Fokalgruppe.

Lemma 3.14. *Es ist*

$$\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \langle x^2 \rangle & \text{falls } r = 0, \\ \langle x^2, xy \rangle & \text{falls } r = 1, \\ \langle x, y \rangle & \text{falls } r = 2. \end{cases}$$

Beweis. Im Fall $n = 3$ ergibt sich das Resultat wieder einfach aus der Operation eines Automorphismus der Ordnung 3 von Q_8. Sei nun $n \geq 4$. Ist $r = 0$, d.h. $\mathcal{F}$ nilpotent, so gilt bekanntlich $\mathfrak{foc} = D' = \langle x^2 \rangle$. Im Fall $r = 1$ sind nach dem Beweis von Lemma 3.13 zusätzlich jeweils für $a \in A$ die Elemente der Form $x^{2^{n-3}} a$ und $x^{2k+1} ya$ für $k \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{F}$-konjugiert. Die Gruppe $\mathfrak{foc}$ wird also erzeugt von x^2 und $x^{2k+1-2^{n-3}} y$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy \rangle$. Für $r = 2$ gilt analog $\mathfrak{foc} = \langle x^2, xy, y \rangle = \langle x, y \rangle$. □

Lemma 3.15. *Olssons Vermutung $k_0(B) \leq |D : D'| = 4|A|$ ist erfüllt.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.4. □

Wir beginnen nun mit der Berechnung von Blockinvarianten und Zerlegungszahlen. Hierbei nutzen wir, dass $\mathrm{Irr}(A)$ nach Lemma 3.14 und Lemma 1.76 frei auf $\mathrm{Irr}(B)$ operiert. Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(A)$ folgt dabei, dass die Werte der Zerlegungszahlen d^u zu B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle x, y \rangle$ auf den $\mathrm{Irr}(A)$-Bahnen konstant sind. Wir werden uns deshalb häufig auf ein Repräsentantensystem X dieser Bahnen zurückziehen können. Hierbei werden wir obige Tatsachen häufig auch ohne explizite Erwähnung benutzen.

Proposition 3.16. *Es gilt stets $l(B) = r + 1$, $k(B) = (2^{n-2} + r + 3)|A|$ und $k_0(B) = 4|A|$. Zudem tritt abhängig von r einer der folgenden Fälle ein:*

(i) $r = 0$ *und* $k_1(B) = (2^{n-2} - 1)|A|$.

(ii) $r = 1$, $n \geq 4$, $k_1(B) = (2^{n-2} - 1)|A|$ *und* $k_{n-2}(B) = |A|$.

(iii) $r = 2$, $n = 3$ *und* $k_1(B) = 3|A|$.

(iv) $r = 2$, $n \geq 4$, $k_1(B) = (2^{n-2} - 1)|A|$ *und* $k_{n-2}(B) = 2|A|$.

Beweis. Im Fall $r = 0$ ist B nilpotent. Insbesondere gilt $k_0(B) = |D : D'| = 4|A|$ und $k(B) = k(D) = (2^{n-2} + 3)|A|$. Die Zahl $|D| = 2^n|A|$ ist Summe von $k(D)$ Quadratzahlen, wobei genau $|D : D'|$ davon 1 sind. Wegen $4|A| + 4(2^{n-2} - 1)|A| = |D|$ folgt $k_1(B) = (2^{n-2} - 1)|A|$ und $k_i(B) = 0$ für $i \geq 2$.

Sei nun also $r \in \{1, 2\}$. Wir berechnen zunächst $k(B) - l(B)$ mittels Satz 1.50 und beginnen mit B-Elementen (u, b_u) mit $u \in Z(D)$. Für solche dominiert b_u wie üblich einen Block $\overline{b_u}$ von

$C_G(u)/\langle u\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle u\rangle$. Für $u \in A \setminus \{1\}$ gilt hierbei $D/\langle u\rangle \cong Q_{2^n} \times A/\langle u\rangle$. Der Wert r stimmt für b_u und $\overline{b_u}$ überein und nach Induktion ist $l(b_u) = l(\overline{b_u}) = r + 1$. Ist $u = y^2 a$ mit $a \in A \setminus \{1\}$, so ist $D/\langle u\rangle \cong Q_{2^n}$, falls $A = \langle a\rangle$. Andernfalls ist $D/\langle u\rangle \cong Q_{2^n} * A$ eine Gruppe wie in Unterabschnitt 3.2. Invarianten von Blöcken $\overline{b_u}$ dieser Art wurden in [60] bzw. Satz 3.11 ermittelt. Für $\overline{b_u}$ tritt in [60] in den Fällen $r = 1$ bzw. $r = 2$ der Fall (ab) bzw. (aa) ein. Für $A \neq \langle a\rangle$ stimmen die Werte von r für b_u und für $\overline{b_u}$ überein. In beiden Fällen folgt $l(b_u) = l(\overline{b_u}) = r + 1$. Für $u = y^2$ ist schließlich $D/\langle u\rangle \cong D_{2^{n-1}} \times A$. Unter Verwendung von [51, Theorem 3.6] bleibt r wieder invariant und Proposition 3.5 liefert $l(b_u) = l(\overline{b_u}) = r + 1$.

Die übrigen B-Elemente haben für $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ und $a \in A$ die Form (u, b_u) mit $u = x^i a$ (oder $u = ya$ im Fall $r = 1$). Die Blöcke b_u sind offenbar nilpotent und es gilt $l(b_u) = 1$. Insgesamt ergibt sich

$$k(B) - l(B) = (r + 1)(2|A| - 1) + (2^{n-2} - 1)|A| + (2 - r)|A| = (2^{n-2} + r + 3)|A| - r - 1.$$

Offenbar ist $y^2 \in Z(\mathcal{F})$ und nach Satz 1.51 gilt $l(B) \geq l(b_{y^2}) = r + 1$. Somit folgt $k(B) \geq (2^{n-2} + r + 3)|A|$.

Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir verallgemeinerte Zerlegungszahlen zum B-Element (y^2, b_{y^2}). Wie oben dominiert b_{y^2} einen Block $\overline{b_{y^2}}$ von $C_G(y^2)/\langle y^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle y^2\rangle \cong D_{2^{n-1}} \times A$. Die Cartanmatrix von b_{y^2} ist nach Proposition 3.7 also abhängig von r entweder

$$|A| \begin{pmatrix} 2^{n-2} + 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad |A| \begin{pmatrix} 2^{n-2} + 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & . \\ 2 & . & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei nun zunächst $r = 1$. Wir bezeichnen die zwei irreduziblen Brauer-Charaktere von b_{y^2} mit φ_1 und φ_2. Betrachten wir die Beitragsmatrix

$$M^{y^2} = (m^{y^2}_{\chi\psi})_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)} = d^{y^2} C^{-1}_{b_{y^2}} (d^{y^2})^T,$$

so ergibt sich

$$2^n |A| m^{y^2}_{\chi\psi} = 4 d^{y^2}_{\varphi_1}(\chi) d^{y^2}_{\varphi_1}(\psi) - 2(d^{y^2}_{\varphi_1}(\chi) d^{y^2}_{\varphi_2}(\psi) + d^{y^2}_{\varphi_2}(\chi) d^{y^2}_{\varphi_1}(\psi)) + (2^{n-3} + 1) d^{y^2}_{\varphi_2}(\chi) d^{y^2}_{\varphi_2}(\psi).$$

Hierbei ist zu beachten, dass wegen $\mathrm{ord}(y^2) = 2$ alle auftauchenden Zerlegungszahlen ganze Zahlen sind. Nach Satz 1.64 hat $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0, wenn $2^n |A| m^{y^2}_{\chi\chi}$ ungerade ist. Das ist äquivalent dazu, dass $d^{y^2}_{\varphi_2}(\chi)$ ungerade ist. Nach Lemma 3.15 ist dies für höchstens 4 Charaktere in X der Fall. Unter den Zerlegungszahlen $d^{y^2}_{\varphi_2}(\chi)$ taucht also für $\chi \in X$ mindestens einmal eine ± 2 auf. Die Ungleichung $k(B) \geq (2^{n-2} + 4)|A|$ impliziert weiter $|X| \geq 2^{n-2} + 4$. Schränken wir nun d^{y^2} auf X ein, so verschwindet bekanntlich keine Zeile dieser Matrix. Daraus folgt leicht, dass diese Einschränkung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \ldots & \pm 1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 \\ . & \ldots & . & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 2\delta_5 \end{pmatrix}^T$$

hat. Hierbei sind $\delta_1, \cdots, \delta_5$ Vorzeichen. Es folgt $k(B) = (2^{n-2} + 4)|A|$ und $k(B) - l(B) = (2^{n-2} + 4)|A| - 2$ zeigt $l(B) = 2$. Die Werte für die restlichen $k_i(B)$ folgen aus Satz 1.64.

Für $r = 2$ gehen wir analog vor. Wir bezeichnen die irreduziblen Brauer-Charaktere von b_{y^2} mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Betrachtung der Beitragsmatrix M^{y^2} liefert mit Satz 1.64, dass $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0 hat, wenn $d^{y^2}_{\varphi_2}(\chi) + d^{y^2}_{\varphi_3}(\chi)$ ungerade ist. Dies ist nach Lemma 3.15 für höchstens 4 Charaktere aus X der Fall. Aus der Abschätzung für $k(B)$ folgt weiter $|X| \geq 2^{n-2} + 5$. Schränken wir d^{y^2} nun wieder auf X ein, so ergibt sich nach einer kurzen Fallunterscheidung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \ldots & \pm 1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 & . \\ . & \ldots & . & \delta_1 & . & \delta_3 & . & \delta_5 & \delta_6 \\ . & \ldots & . & . & \delta_2 & . & \delta_4 & \delta_5 & -\delta_6 \end{pmatrix}^T.$$

Hierbei sind $\delta_1,\ldots,\delta_6$ Vorzeichen. Es folgen $k(B) = (2^{n-2}+5)|A|$ und $l(B) = 3$. Die Werte für die restlichen $k_i(B)$ ergeben sich wieder aus Satz 1.64. □

Aus Proposition 3.16 folgen auch alle Vermutungen, die wir in Abschnitt 2 aufgelistet haben. Alperins Gewichtsvermutung ergibt sich hierbei wie in [77, Theorem 2.8]. Nun berechnen wir die Gestalt der Cartanmatrix von B bis auf Basiswahl.

Proposition 3.17. *Es existiert eine $\mathbb{Z}\operatorname{IBr}(B)$-Basis, sodass die Cartanmatrix von B bezüglich dieser Basis die Form*

$$|A|(2^n), \qquad |A|\begin{pmatrix}2^{n-2}+2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad |A|\begin{pmatrix}2^{n-2}+2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & .\\ 2 & . & 4\end{pmatrix}$$

hat.

Beweis. Ist $r = 0$, so ist B nilpotent und hat bekanntlich die Cartanmatrix $(|D|) = |A|(2^n)$. Wir können also im Folgenden von $r \in \{1,2\}$ ausgehen. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 3$ und $r = 2$. In X liegen dann nach Proposition 3.16 vier Charaktere von Höhe 0 und drei Charaktere von Höhe 1. Nach dem Beweis dieses Satzes existieren Vorzeichen $\delta_1,\ldots,\delta_5$ und ϵ, sodass der Teil d^{y^2} der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix}\epsilon & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 & .\\ . & \delta_1 & . & \delta_3 & . & \delta_5 & \delta_6\\ . & . & \delta_2 & . & \delta_4 & \delta_5 & -\delta_6\end{pmatrix}^T$$

hat. Hierbei gehören die zweite bis fünfte Zeile dieser Matrix zu Charakteren der Höhe 0. Die übrigen Zeilen gehören zu Charakteren der Höhe 1. Die Zerlegungszahlen in d^x sind rational nach Lemma 1.58 und es gilt $(d^x, d^x) = 4|A|$ nach Proposition 1.57. Nach Proposition 1.54 ist diese Spalte von Zerlegungszahlen zudem orthogonal zu den Spalten von d^{y^2} oben. Die Zerlegungszahlen $d^x(\chi)$ verschwinden nach Lemma 1.61 für $\chi \in \operatorname{Irr}_0(B)$ nicht. Relativ zu derselben Reihenfolge der Charaktere in X hat die Einschränkung von d^x auf X also die Form

$$\begin{pmatrix}. & \delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 & \delta_4 & . & .\end{pmatrix}^T$$

bis auf Basiswahl. Hierbei wurde das Vorzeichen in der zweiten Zeile durch eventuelle Neuwahl der $\mathbb{Z}\operatorname{IBr}(b_x)$-Basis erreicht. Wir erhalten nun nach dem Algorithmus in Unterabschnitt 1.14 die gewöhnliche Zerlegungsmatrix d^1 bis auf Basiswahl, indem wir eine $\mathbb{Z}$-Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls berechnen, welcher die Spalten enthält, die zu den Spalten der obigen Matrizen orthogonal sind. Eine leichte Berechnung von Hand oder mit GAP (siehe [31]) zeigt, dass d^1 eingeschränkt auf X relativ zu derselben Reihenfolge der Charaktere die Form

$$\begin{pmatrix}\epsilon & -\delta_1 & . & . & \delta_4 & . & \delta_6\\ . & -\delta_1 & . & -\delta_3 & . & \delta_5 & \delta_6\\ . & . & \delta_2 & . & \delta_4 & -\delta_5 & \delta_6\end{pmatrix}^T$$

hat. Die Gestalt der Cartanmatrix folgt.

Sei nun $n \geq 4$. Die Berechnung der Cartanmatrix verläuft hier weitgehend analog zu der Berechnung im Beweis von Proposition 3.7. Nach Proposition 3.16 liegen in X vier Charaktere der Höhe 0, $2^{n-2}-1$ Charaktere der Höhe 1 und r Charaktere der Höhe $n-2$. Wir zeigen zunächst, dass die Charaktere von Höhe ungleich 1 auf den Zerlegungszahlen d^u für alle B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle x, y\rangle$ ausschließlich rationale Werte annehmen. Ist $r = 2$, so hat die Einschränkung von d^{y^2} auf X nach dem Beweis von Proposition 3.16 die Gestalt

$$\begin{pmatrix}\pm1 & \ldots & \pm1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 & .\\ . & \ldots & . & \delta_1 & . & \delta_3 & . & \delta_5 & \delta_6\\ . & \ldots & . & . & \delta_2 & . & \delta_4 & \delta_5 & -\delta_6\end{pmatrix}^T$$

bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{y^2})$-Basis. Hierbei seien die Charaktere, die zu den letzten sechs Zeilen gehören, in dieser Reihenfolge mit $\chi_1, \ldots, \chi_6$ bezeichnet. In X haben gerade diese Charaktere nicht Höhe 1. Wäre nun ein Eintrag $d^u(\chi_j)$ für $1 \leq j \leq 6$ nicht rational, so würde ein Charakter $\chi'_j \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\chi_j \neq \chi'_j$ existieren, sodass $d^u(\chi_j) \neq d^u(\chi'_j)$ ist und sodass χ_j und χ'_j $\mathcal{G}$-konjugiert sind. Da die Werte in d^{y^2} rational sind und sich für alle χ_k unterscheiden, gehören χ_j und χ'_j zur selben $\mathrm{Irr}(A)$-Bahn. Die Zerlegungszahlen d^u sind aber auf $\mathrm{Irr}(A)$-Bahnen konstant. Das ist ein Widerspruch und zeigt die Behauptung im Fall $r = 2$.

Für $r = 1$ argumentieren wir ähnlich. Die Einschränkung von d^{y^2} auf X hat nach dem Beweis von Proposition 3.16 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \ldots & \pm 1 & \delta_1 & \delta_2 & . & . & \delta_5 \\ . & \ldots & . & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 2\delta_5 \end{pmatrix}^T$$

bis auf Basiswahl. Die Charaktere zu den letzten fünf Zeilen seien $\chi_1, \ldots, \chi_5$ in dieser Reihenfolge. Wieder haben genau diese fünf Charaktere aus X nicht Höhe 1. Nach Proposition 1.57 ist weiter $(d^y, d^y) = 4|A|$ und die Spalte von Zerlegungszahlen d^y ist nach Proposition 1.54 orthogonal zu den zwei Spalten von d^{y^2}. Zudem verschwinden die Einträge von d^y auf $\chi_1, \ldots, \chi_4$ nach Satz 1.65 nicht. Nach eventueller Neuwahl der Reihenfolge der Charaktere χ_1 und χ_2 sowie χ_3 und χ_4 (inklusive der δ_i) folgt dann

$$d^y(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ -\delta_2 & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ \delta_3 & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ -\delta_4 & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nun ergibt sich die Rationalität der Zerlegungszahlen d^u für die Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_5$ wie im Fall $r = 1$.

Wie im Beweis von Proposition 3.7 kann man nun Spalten a_i^x für $1 \leq i \leq 2^{n-3} - 1$ untersuchen und stellt fest, dass disjunkte Familien $F_0, F_1, \ldots, F_{n-3} \subset X$ von Charakteren von Höhe 1 mit $|F_j| = 2^j$ existieren, sodass die Charaktere in den Familien jeweils auf den rationalen Teil der Zerlegungszahlen d^u zu B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle x, y \rangle$ konstant sind. Statt der Orthogonalität zu $d^{x^{2^{n-2}}}$ (in Proposition 3.7) benutzt man hierbei die Orthogonalität zur ersten Spalte von d^{y^2}. Bezeichnen wir den irreduziblen Brauer-Charakter zur ersten Spalte obiger Zerlegungsmatrizen d^{y^2} mit φ, so existieren Vorzeichen $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-3}$ mit $d_\varphi^{y^2}(\chi) = \epsilon_j$ für $\chi \in F_j$. Proposition 1.57, Proposition 1.54 und Lemma 1.61 ergeben nach Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_x)$-Basis weiter

$$a_0^x(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ -\delta_2 & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ -\delta_3 & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ \delta_4 & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst.} \end{cases}$$

Analog zum Beweis von Proposition 3.7 zeigen wir nun, dass bis auf Basiswahl

$$a_0^{x^{2^s}}(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ \delta_2 & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ -\delta_3 & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ -\delta_4 & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ 2\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq s-2 \\ -2\epsilon_{s-1} & \text{falls } \chi \in F_{s-1}, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst} \end{cases}$$

für $1 \leq s \leq n-3$ gilt. Hierfür werden wir wiederholt Proposition 1.57 und Proposition 1.54 anwenden, dies aber nicht jedes Mal erwähnen. Es ist $(a_0^{x^{2^s}}, a_0^{x^{2^s}}) = 2^{s+2}|A|$. Für $s=1$ ist dieses Skalarprodukt also gleich $8|A|$. In $a_0^{x^2}$ werden somit nach Lemma 1.61 Werte ± 1 für Charaktere der Höhe 0 und ± 2 für einen Charakter positiver Höhe angenommen. Nach Satz 1.64 tritt hierbei ± 2 für einen Charakter der Höhe 1 auf und aus der Operation von $\mathcal{G}$ folgt, dass dies für den Charakter in F_0 gilt. Durch eventuelle Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x^2})$-Basis kann $a_0^{x^2}(\chi_1) = \delta_1$ erzwungen werden und Orthogonalität mit d^{y^2} liefert dann die angegebenen Werte für die Charaktere von Höhe 0 und den Charakter in F_0.

Sei nun also $s > 1$. Sicher ist $(a_0^{x^{2^s}}, a_0^{x^{2^s}}) \equiv 0 \pmod 8$. Wegen Satz 1.64, der Operation von $\mathcal{G}$ und da ungerade Quadratzahlen kongruent zu 1 modulo 8 sind, gilt $a_0^{x^{2^s}}(\psi) \equiv 2 \pmod 4$ für den Charakter $\psi \in F_0$. Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_{l(b_{y^2})}$ die irreduziblen Brauer-Charaktere von b_{y^2} in der Reihenfolge wie in den obigen Matrizen angegeben. Wir betrachten $\widetilde{d^{y^2}} := 2\varphi_1 - \varphi_2$ für $r=1$ bzw. $\widetilde{d^{y^2}} := 2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ für $r=2$. Es ergibt sich:

$$\widetilde{d^{y^2}}(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ \delta_2 & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ -\delta_3 & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ -\delta_4 & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ 2\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq n-3, \\ 0 & \text{falls } \chi \in X \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nun folgt wie im Beweis von Proposition 3.7, dass die Struktur von $a_0^{x^{2^s}}$ wie oben angegeben ist. Die Rolle von $d^{x^{2^{n-2}}}$ übernimmt hierbei lediglich die Spalte $\widetilde{d^{y^2}}$.

Nach dieser Analyse der verallgemeinerten Zerlegungszahlen, können wir die gewöhnlichen Zerlegungszahlen nach dem Algorithmus in Unterabschnitt 1.14 bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis als Basis des orthogonalen Komplements des $\mathbb{Z}$-Moduls aufgespannt von den bisher betrachteten Spalten von Zerlegungszahlen berechnen. Sei hierfür c eine beliebige $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Spalten von gewöhnlichen Zerlegungszahlen. Orthogonalität von c und $\widetilde{d^{y^2}} - a_0^{x^{2^s}}$ für $n-3 \geq s \geq 1$ liefert

$$c(\chi) = \begin{cases} \widetilde{c}\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq n-4, \\ -\widetilde{c}\epsilon_{n-3} & \text{falls } \chi \in F_{n-3} \end{cases}$$

für ein $\widetilde{c} \in \mathbb{Z}$. Für $r=1$ ist weiter $\delta_1 c(\chi_1) + \delta_2 c(\chi_2) + \delta_5 c(\chi_5) = \widetilde{c}$ und $\delta_3 c(\chi_3) + \delta_4 c(\chi_4) + \delta_5 c(\chi_5) = -\widetilde{c}$, da c und d^{y^2} orthogonal sind. Orthogonalität zu $a_0^x + d^y$ und $a_0^x - d^y$ liefert weiter $\delta_1 c(\chi_1) = \delta_2 c(\chi_2)$ und $\delta_3 c(\chi_3) = \delta_4 c(\chi_4)$. Für d^1 ergibt sich nach einer kurzen Rechnung somit im Fall $r=1$ die Form

$$d^1(\chi) = \begin{cases} (\delta_1, \delta_1) & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ (\delta_2, \delta_2) & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ (0, \delta_3) & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ (0, \delta_4) & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ (-\delta_5, -2\delta_5) & \text{falls } \chi = \chi_5, \\ (\epsilon_j, 0) & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq n-4, \\ (-\epsilon_{n-3}, 0) & \text{falls } \chi \in F_{n-3} \end{cases}$$

bis auf eine Basiswahl.

Im Fall $r=2$ liefert die Orthogonalität von c und d^{y^2} die Gleichungen $\delta_1 c(\chi_1) + \delta_2 c(\chi_2) + \delta_5 c(\chi_5) = \widetilde{c}$, $\delta_2 c(\chi_2) - \delta_3 c(\chi_3) - \delta_6 c(\chi_6) = \widetilde{c}$ und $\delta_1 c(\chi_1) - \delta_4 c(\chi_4) + \delta_6 c(\chi_6) = \widetilde{c}$. Orthogonalität zu a_0^x ergibt weiter $\delta_1 c(\chi_1) - \delta_2 c(\chi_2) - \delta_3 c(\chi_3) + \delta_4 c(\chi_4) = 0$. Eine leichte Rechnung ergibt die Gestalt

$$d^1(\chi) = \begin{cases} (\delta_1, \delta_1, 0) & \text{falls } \chi = \chi_1, \\ (\delta_2, 0, \delta_2) & \text{falls } \chi = \chi_2, \\ (0, \delta_3, 0) & \text{falls } \chi = \chi_3, \\ (0, 0, \delta_4) & \text{falls } \chi = \chi_4, \\ (-\delta_5, -\delta_5, -\delta_5) & \text{falls } \chi = \chi_5, \\ (0, -\delta_6, \delta_6) & \text{falls } \chi = \chi_6, \\ (\epsilon_j, 0, 0) & \text{falls } \chi \in F_j \text{ und } 0 \leq j \leq n-4, \\ (-\epsilon_{n-3}, 0, 0) & \text{falls } \chi \in F_{n-3} \end{cases}$$

bis auf Basiswahl. Aus der Form von d^1 folgt nun in beiden Fällen die behauptete Cartanmatrix relativ zu denselben $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basen.

Abschließend ist zu bemerken, dass die hier angegebenen Spalten auch zu sämtlichen Spalten von Zerlegungszahlen zu d^u für $u \notin \langle x, y\rangle$ und auch zu den nichtrationalen Parts der Zerlegungszahlen zu d^u für $u \in \langle x, y\rangle$ orthogonal sind. Dies folgt mit den Bemerkungen in Unterabschnitt 1.14. $\square$

In [77, Section 3] untersucht Sambale auch Blöcke mit Defektgruppen $SD_{2^n} \times C_{2^m}$ für $n \geq 4$ und $m \geq 1$. Eine Verallgemeinerung dieses Resultats auf direkte Produkte $SD_{2^n} \times A$ für beliebige abelsche 2-Gruppen A mit Fusionssystem der Form $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}_A(A)$ wie für die andere Familie von Defektgruppen aus [77] sollte prinzipiell mit denselben Methoden möglich sein. Wir verzichten an dieser Stelle jedoch auf eine Durchführung dieser Untersuchung, denn Resultate über Defektgruppen $SD_{2^n} \times A$ werden in den folgenden Abschnitten der Arbeit nicht benötigt.

4 Blöcke mit Defektgruppen $C_2 \times C_2 \times P$

Im Folgenden untersuchen wir 2-Blöcke B von G mit Defektgruppe $D = C_2 \times C_2 \times P$ für eine beliebige 2-Gruppe P. Der Block B habe das Fusionssystem $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_P(P)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein Fusionssystem auf $C_2 \times C_2$ ist. Wir zeigen den folgenden Satz.

Satz 4.1. *Es gelten $l(B) \in \{1, 3\}$, $k(B) = 4k(P)$ und $k_i(B) = 4k_{2^i}(P)$ für $i \geq 0$. Weiter hat B abhängig von $\mathcal{F}'$ die Cartanmatrix*

$$\begin{pmatrix} 4|P| \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad |P| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl.

Es gibt für $\mathcal{F}'$ bekanntlich die zwei Möglichkeiten $\mathcal{F}_{C_2 \times C_2}(C_2 \times C_2)$ und $\mathcal{F}_{C_2 \times C_2}((C_2 \times C_2) \rtimes C_3)$. Im ersten Fall ist $\mathcal{F}'$ und damit $\mathcal{F}$ nilpotent und Satz 4.1 folgt aus Satz 1.46. Wir gehen also im Folgenden davon aus, dass der zweite Fall eintritt. Zum Beweis des Satzes führen wir eine Induktion nach $|P|$. Den Induktionsanfang liefert hierbei [13, Section VII]. Wir können also von $P \neq 1$ ausgehen.

Zunächst berechnen wir die Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ zum Skalarprodukt $(\chi, \chi)_G$ für Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$. Hierfür sei $\mathcal{C}$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von P.

Lemma 4.2. *Es sei ein nichttriviales $v \in C_2 \times C_2$ beliebig gegeben. Dann bilden (p, b_p) und (vp, b_{vp}) für $p \in \mathcal{C}$ ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ hat hierbei b_u stets die Defektgruppe $C_D(u)$.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Lemma 1.49 und der Gestalt des Fusionssystems. □

Die Bezeichnung $\mathcal{R}$ für das obige Repräsentantensystem werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden.

Lemma 4.3. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, $u = vp$ mit $v \in C_2 \times C_2$ und $p \in P$, und $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ ein B-Element, so ist*

$$|C_D(u)| m^u_{\chi\chi} = \begin{cases} 3 & \textit{falls } v = 1, \\ 1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Zunächst sei $p \notin Z(P)$. Dann hat b_u Defektgruppe $C_2 \times C_2 \times C_P(u) < D$ und nach Induktion existiert eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-Basis, sodass die Cartanmatrix von b_u bezüglich dieser Basis entweder

$$\begin{pmatrix} 4|C_P(u)| \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad |C_P(u)| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Der erste der Fälle tritt ein, wenn b_u nilpotent ist, d.h. wenn $v \neq 1$. Andernfalls tritt der zweite Fall ein. Dies gilt auch für $p \in Z(P)$ mit $u \neq 1$. Ist nämlich $v \neq 1$, so ist b_u nilpotent, und ist $v = 1$, so dominiert b_u einen Block $\overline{b_u} \in \mathrm{Bl}(\mathcal{O}[C_G(u)/\langle u \rangle])$ mit Defektgruppe $D/\langle u \rangle \cong C_2 \times C_2 \times \overline{P}$ und $|\overline{P}| < |P|$. Dann ergibt sich die Cartanmatrix wieder nach Induktion.

Ist b_u nilpotent, so existiert nach Satz 1.65 ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $|a^u_i(\chi)| \geq 1$. Der rationale Part von $|C_D(u)| m^u_{\chi\chi}$ ist folglich mindestens 1. Gleichheit kann hierbei offenbar nur auftreten, falls nur ein i mit nichtverschwindenden $a^u_i(\chi)$ existiert. Ist b_u nicht nilpotent und $u \neq 1$, so folgt mit Lemma 1.67, dass der rationale Part von $|C_D(u)| m^u_{\chi\chi}$ mindestens 3 ist. Gleichheit tritt hier nur dann auf, wenn d^u ein ganzzahliger Vektor multipliziert mit einer $|P|$-ten Einheitswurzel ist. Summieren wir nun die rationalen Teile der $m^u_{\chi\chi}$ für alle B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}' := \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$, so ergibt sich mindestens die Summe

$$\sum_{\substack{(u,b_u)\in\mathcal{R}'\\ u=vp,v=1}} \frac{3}{|C_D(u)|} + \sum_{\substack{(u,b_u)\in\mathcal{R}'\\ u=vp,v\neq 1}} \frac{1}{|C_D(u)|} = \sum_{C\in\mathrm{Cl}(P)} \frac{(1+3)|C|}{|D|} - \frac{3}{|D|} = 1 - \frac{3}{|D|}.$$

Nach Satz 1.63 ist die entsprechende Summe über alle B-Elemente gleich 1. Zudem ist $m^1_{\chi\chi}$ mindestens $\frac{1}{|D|}$. Zu beachten ist hierbei, dass mit $d^1(\chi)$ auch $m^1_{\chi\chi}$ rational ist. Wir zeigen nun $m^1_{\chi\chi} = \frac{3}{|D|}$. Andernfalls liegt bei einem der rationalen Teile der anderen $m^u_{\chi\chi}$ oben nicht der Gleichheitsfall vor. Ist dies für ein $u \neq 1$ der Fall, für das b_u nicht nilpotent ist, so ergibt sich aus Lemma 1.67 (ii) ein Widerspruch zu Satz 1.63. Ist b_u nilpotent, so ist der rationale Teil von $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}$ nach Lemma 1.66 ungerade. Ist der rationale Teil also größer als 1, so ist er 3. Aus einer einfachen Berechnung folgt dann, dass $m^u_{\chi\chi}$ nicht rational sein kann. Gleichzeitig tritt oben für die rationalen Teile aller $m^t_{\chi\chi}$ mit $t \notin \{1, u\}$ der Gleichheitsfall ein. Wie oben festgestellt, folgt dann, dass die $m^t_{\chi\chi}$ für B-Elemente (t, b_t) mit $t \neq u$ rational sind. Das widerspricht aber Satz 1.63. Dieser Widerspruch zeigt $|D|m^1_{\chi\chi} = 3$. Somit tritt für die rationalen Parts der $m^u_{\chi\chi}$ oben der Gleichheitsfall ein und die Behauptung folgt. □

Mittels der $*$-Konstruktion können wir unser Wissen über Charaktere der Höhe 0 nun auf weitere Charaktere ausdehnen.

Proposition 4.4. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und $\mu \in \mathrm{Irr}(P)$, so ist $\mu * \chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Die induzierte Abbildung $I_\chi : \mathrm{Irr}(P) \to \mathrm{Irr}(B)$ ist injektiv.*

Beweis. Es seien $\lambda, \mu \in \mathrm{Irr}(B)$ beliebig gegeben. Dann sind $\lambda * \chi$ und $\mu * \chi$ bekanntlich verallgemeinerte Charaktere von B. Wir zeigen

$$(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Satz 1.63 und Lemma 4.3 berechnen wir

$$(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \lambda(u)\overline{\mu(u)} m^u_{\chi\chi} = \sum_{p\in\mathcal{C}} \lambda(p)\overline{\mu(p)} \cdot \frac{1+3}{|C_D(p)|} = \sum_{p\in\mathcal{C}} \frac{1}{|C_P(p)|} \lambda(p)\overline{\mu(p)}.$$

Die behauptete Gleichung folgt nun aus den gewöhnlichen Orthogonalitätsrelationen in $\mathrm{Irr}(P)$. Somit ist $\lambda*\chi$ zumindest bis auf ein Vorzeichen ein irreduzibler Charakter von B. Wegen $(\lambda*\chi)(1) = \lambda(1)\chi(1)$ ist dieses Vorzeichen positiv. Da die $\lambda * \chi$ für verschiedene $\lambda \in \mathrm{Irr}(B)$ orthogonal sind, folgt die Injektivität von I_χ. □

Der verallgemeinerte Charakter λ von $C_2 \times C_2$ mit

$$\lambda(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v = 1, \\ -3 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist offenbar $\mathcal{F}$-stabil, wenn man ihn als verallgemeinerten Charakter von D auffasst. Wir untersuchen die Struktur von $\lambda * \chi$ für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$.

Lemma 4.5. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, so existieren Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathrm{Irr}_0(B) \setminus \{\chi\}$ mit*

$$\lambda * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3.$$

Beweis. Da λ ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter ist, ist $\lambda * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Mit Satz 1.63 und Lemma 4.3 ergibt sich

$$(\lambda * \chi, \lambda * \chi)_G = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \lambda(u)\overline{\lambda(u)} m^u_{\chi\chi} = \sum_{p\in\mathcal{C}} \frac{9 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{4|C_P(p)|} = \frac{3}{|P|} \sum_{p\in\mathcal{C}} |{}^P p| = 3.$$

Weiter berechnet man

$$(\lambda * \chi, \chi)_G = \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \lambda(u) m^u_{\chi\chi} = \sum_{p\in\mathcal{C}} \frac{(-3)\cdot 1 + 1\cdot 3}{4|C_P(p)|} = 0.$$

Es existieren also Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und Charaktere $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathrm{Irr}(B) \setminus \{\chi\}$ mit

$$\lambda * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass χ_1, χ_2 und χ_3 Höhe 0 haben. Wegen $\lambda(1) = 1$ kann aus Gradgründen zumindest $\chi_1 \in \mathrm{Irr}_0(B)$ angenommen werden. Haben weiter χ_2 und χ_3 nicht beide Höhe 0, so hat dies keiner dieser Charaktere. Wir werden im Folgenden von dieser Situation ausgehen und einen Widerspruch konstruieren. Wir berechnen:

$$\lambda * (\epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3) = \lambda^2 * \chi = (-2\lambda + 3\cdot 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}) * \chi = 3\chi - 2\epsilon_1\chi_1 - 2\epsilon_2\chi_2 - 2\epsilon_3\chi_3. \quad (*)$$

Weiter ist

$$\lambda * (\epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3) = \epsilon_1\lambda * \chi_1 + \epsilon_2\lambda * \chi_2 + \epsilon_3\lambda * \chi_3.$$

Wir werden diese drei Summanden nun einzeln analysieren. Es sei S_2 die Summe der Beiträge $m^u_{\chi_2\chi_2}$ für B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $\lambda(u) = -3$. Nach Satz 1.63 ist die Summe über die Beiträge der übrigen B-Elemente in $\mathcal{R}$ dann $1 - S_2$ und man berechnet

$$(\lambda * \chi_2, \chi_2)_G = (-3)\cdot S_2 + 1\cdot(1 - S_2) = 1 - 4S_2 \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt $S_2 \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Da Beiträge zu B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in Z(D)$ nicht verschwinden, folgt sogar $S_2 \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Gleiches gilt für die entsprechende Summe S_3 für χ_3. Wir schätzen nun die Summe $S_2 + S_3$ ab. Für B-Elemente (u, b_u) mit $\lambda(u) = -3$ ist

$$-3d^u(\chi) = \epsilon_1 d^u(\chi_1) + \epsilon_2 d^u(\chi_2) + \epsilon_3 d^u(\chi_3).$$

Aus Lemma 4.3 folgen $d^u(\chi) = \zeta$ und $d^u(\chi_1) = \zeta'$ für $|D|$-te Einheitswurzeln ζ und ζ'. Verschwindet weder $d^u(\chi_2)$ noch $d^u(\chi_3)$, so haben $|C_D(u)|m^u_{\chi_2\chi_2}$ und $|C_D(u)|m^u_{\chi_3\chi_3}$ beide nach Satz 1.65 wenigstens den rationalen Part 2. Verschwindet hingegen einer dieser Beiträge, etwa $d^u(\chi_3)$, so folgt leicht, dass der rationale Teil von $|C_D(u)|m^u_{\chi_2\chi_2}$ wenigstens 4 ist. Ist sogar $u \in Z(D)$ mit $u^2 = 1$, so enthält d^u ausschließlich ganze Einträge und weder $d^u(\chi_2)$ noch $d^u(\chi_3)$ verschwinden. Gegebenenfalls folgt unmittelbar $|C_D(u)|m^u_{\chi_2\chi_2}, |C_D(u)|m^u_{\chi_3\chi_3} \geq 4$. Offensichtlich tritt dieser Fall (für wenigstens zwei u) ein. Der rationale Teil von $S_2 + S_3$ ist folglich größer als

$$\sum_{p\in\mathcal{C}} \frac{4}{4|C_P(p)|} = 1.$$

Nehmen wir ohne Einschränkung $S_2 \geq S_3$ an, so folgen $S_2 = \frac{3}{4}$ und $S_3 \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Man berechnet

$$(\lambda * \chi_2, \lambda * \chi_2)_G = 9\cdot S_2 + 1\cdot(1 - S_2) = 7.$$

Mit $(\lambda * \chi_2, \chi_2) = 1 - 4S_2 = -2$ folgt die Existenz von Vorzeichen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und verschiedenen Charakteren $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathrm{Irr}(B) \setminus \{\chi_2\}$ mit

$$\lambda * \chi_2 = -2\chi_2 + \delta_1\psi_1 + \delta_2\psi_2 + \delta_3\psi_3.$$

Analoge Betrachtung für χ_3 liefert einen der folgenden Fälle:

(i) $\lambda * \chi_3 = -2\chi_3 + \delta_4\psi_4 + \delta_5\psi_5 + \delta_6\psi_6$,

(ii) $\lambda * \chi_3 = -\chi_3 + 2\delta_4\psi_4$,

(iii) $\lambda * \chi_3 = -\chi_3 + \delta_4\psi_4 + \delta_5\psi_5 + \delta_6\psi_6 + \delta_7\psi_7$.

Hierbei sind wieder $\delta_4, \ldots, \delta_7$ Vorzeichen und $\chi_3, \psi_4, \ldots, \psi_7$ verschiedene irreduzible Charaktere von B. Wir analysieren die Struktur dieser irreduziblen Charaktere. Hierfür stellen wir zunächst

$$\epsilon_3 = (\chi_3, \lambda * \chi)_G = (\lambda * \chi_3, \chi)_G$$

fest. Der irreduzible Charakter χ taucht also mit Vorzeichen ϵ_3 in $\lambda * \chi_3$ auf. Das schließt Fall (ii) aus und erzwingt ohne Einschränkung $\delta_4\psi_4 = \epsilon_3\chi$ in den übrigen Fällen. Wie $\lambda * \chi$ ist auch $\lambda * \chi_1$ eine vorzeichenbehaftet Summe von drei irreduziblen Charakteren von B. Wie für χ_3 ist einer dieser drei Charaktere gerade χ und χ_1 ist keiner der Charaktere. Aus der Struktur von (*) folgt somit ohne Einschränkung $\delta_5\psi_5 = -\epsilon_1\epsilon_3\chi_1$. Mit

$$-\epsilon_1\epsilon_3 = (\chi_1, \lambda * \chi_3)_G = (\lambda * \chi_1, \chi_3)_G$$

ergibt sich dann, dass einer der Summanden von $\lambda * \chi_1$ gerade $-\epsilon_1\epsilon_3\chi_3$ ist. Analog folgen ohne Einschränkung $\delta_1\psi_1 = \epsilon_2\chi$ und $\delta_2\psi_2 = -\epsilon_1\epsilon_2\chi_1$. Weiter ergibt sich, dass einer der Summanden von $\lambda * \chi_1$ gerade $-\epsilon_1\epsilon_2\chi_2$ ist. Aus (*) folgt nun ohne Einschränkung $\delta_6\psi_6 = \epsilon_2\epsilon_3\chi_2$. Mit

$$\epsilon_2\epsilon_3 = (\chi_2, \lambda * \chi_3)_G = (\lambda * \chi_2, \chi_3)_G$$

erhalten wir schließlich $\delta_3\psi_3 = \epsilon_2\epsilon_3\chi_3$. In der Situation (iii) ist dies allerdings ein Widerspruch für den Koeffizienten von χ_3 in (*). Es tritt also (i) ein und wir haben

$$\begin{aligned}
\lambda * \chi_1 &= \epsilon_1\chi - \epsilon_1\epsilon_2\chi_2 - \epsilon_1\epsilon_3\chi_3, \\
\lambda * \chi_2 &= -2\chi_2 + \epsilon_2\chi - \epsilon_1\epsilon_2\chi_1 + \epsilon_2\epsilon_3\chi_3, \\
\lambda * \chi_3 &= -2\chi_3 + \epsilon_3\chi - \epsilon_1\epsilon_3\chi_1 + \epsilon_2\epsilon_3\chi_2
\end{aligned}$$

gezeigt. Insbesondere gilt auch $S_3 = \frac{3}{4}$. Um schließlich diese Situation zum Widerspruch zu führen, betrachten wir B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $\lambda(u) = 1$. Für die zugehörigen Zerlegungszahlen ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$3d^u(\chi_2) = \epsilon_2 d^u(\chi) - \epsilon_1\epsilon_2 d^u(\chi_1) + \epsilon_2\epsilon_3 d^u(\chi_3).$$

Zunächst sei nun $u \neq 1$. Wie im Beweis von Lemma 4.3 hat b_u dann die Cartanmatrix

$$C := |C_P(u)| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Setzen wir

$$M := C^{-1} = \frac{1}{4|C_P(u)|} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|C_D(u)|} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

so gilt $m^u_{\psi\psi} = d^u(\psi) M \overline{d^u(\psi)}^T$ für $\psi \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(B)$. Ist $d^u(\psi) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} a_i \zeta^i$ für eine primitive $2^n := |D|$-te Einheitswurzel ζ und $a_i \in \mathbb{Z}^{1\times 3}$, so ist der rationale Teil von $m^u_{\psi\psi}$ gerade $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} a_i M a_i^T$. Da C bekanntlich positiv definit und symmetrisch ist, definiert dies eine Norm

$$||\cdot|| : \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(B) \to \mathbb{R}, \qquad \psi \mapsto \sqrt{|C_D(u)| \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} a_i M a_i^T}.$$

Nach Lemma 4.3 und Lemma 1.67 ist dann $||\chi|| = ||\chi_1|| = \sqrt{3}$. Es folgt auch $||\chi_2|| \geq 2$, falls $d^u(\chi_2)$ nicht verschwindet. In dieser Situation folgt also mit $||\epsilon_2\chi - \epsilon_1\epsilon_2\chi_1|| \leq ||\chi|| + ||\chi_1|| = 2\sqrt{3} < 4$,

$$\begin{aligned}
||\chi_3|| = ||3\chi_2 - \epsilon_2\chi + \epsilon_1\epsilon_2\chi_1|| &\geq 3||\chi_2|| - ||\epsilon_2\chi - \epsilon_1\epsilon_2\chi_1|| \geq 3||\chi_2|| - ||\chi|| - ||\chi_1|| \\
&= 3||\chi_2|| - 2\sqrt{3} > ||\chi_2||.
\end{aligned}$$

Für $u = 1$ sind alle oben betrachteten Beiträge rational und es gilt $|D|m^1_{\chi\chi} = |D|m^1_{\chi_1\chi_1} = 3$ und $|D|m^1_{\chi_2\chi_2} \geq 4$ nach Lemma 4.3 und Satz 1.64. Ein ähnliches Argument liefert auch hier $m^1_{\chi_3\chi_3} > m^1_{\chi_2\chi_2}$. Da die Summen der Beiträge zu B-Elementen (u, b_u) mit $\lambda(u) = 1$ für χ_2 und χ_3 allerdings beide $\frac{1}{4}$ sind, ist dies ein Widerspruch. Das zeigt, dass χ_1, χ_2 und χ_3 tatsächlich die Höhe 0 haben. □

Die folgende Proposition liefert nun ein Resultat wie [26, Corollary 1.8]. Allerdings fordern wir dafür nicht, dass P normal in G ist.

Proposition 4.6. *Es gibt Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \mathrm{Irr}_0(B)$, sodass die Abbildung*

$$I : \mathrm{Irr}(P) \times \{\chi_1, \ldots, \chi_4\} \to \mathrm{Irr}(B), \qquad (\mu, \chi) \mapsto \mu * \chi$$

eine Bijektion ist.

Beweis. Es sei ein Charakter $\chi_1 \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben. Nach Lemma 4.5 existieren Charaktere $\chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und Vorzeichen $\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ mit

$$\lambda * \chi_1 = \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3 + \epsilon_4\chi_4.$$

Mit diesen Charakteren können wir nach Proposition 4.4 die Abbildung I oben definieren.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Abbildung I injektiv und surjektiv ist. Für die Injektivität nehmen wir an, dass es Charaktere $\alpha, \beta \in \mathrm{Irr}(P)$ und $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$ mit $\alpha * \chi_i = \beta * \chi_j$ und $(\alpha, i) \neq (\beta, j)$ gibt. Der Fall $i = j$ tritt nach Proposition 4.4 nicht ein. Im Folgenden sei also $i \neq j$. Es ist

$$\epsilon_2\lambda * \chi_2 + \epsilon_3\lambda * \chi_3 + \epsilon_4\lambda * \chi_4 = \lambda^2 * \chi_1 = ((-2)\lambda + 3 \cdot 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}) * \chi_1 = 3\chi_1 - 2\epsilon_2\chi_2 - 2\epsilon_3\chi_3 - 2\epsilon_4\chi_4.$$

Anwendung von Lemma 4.5 auf χ_2, χ_3 und χ_4 liefert, dass $\lambda * \chi_i$ den Summanden $\pm\chi_j$ enthält. Ohne Einschränkung können wir also $i = 1$ annehmen. Dann ist nach Satz 1.63

$$(\beta * (\lambda * \chi_1), \beta * (\lambda * \chi_1))_G = \sum_{(u,b_u) \in \mathcal{R}} \beta(u)\lambda(u)\overline{\beta(u)\lambda(u)} m^u_{\chi_1\chi_1} = \sum_{p \in \mathcal{C}} \beta(p)\overline{\beta(p)} \cdot \frac{9 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{4|C_P(p)|} = 3.$$

Mit Proposition 4.4 folgt also, dass $\epsilon_j\beta * \chi_j$ ein Summand von $\beta * (\lambda * \chi_1)$ ist. Andererseits ist

$$(\alpha * \chi_1, \beta * (\lambda * \chi_1))_G = \sum_{(u,b_u) \in \mathcal{R}} \alpha(u)\overline{\beta(u)\lambda(u)} m^u_{\chi_1\chi_1} = \sum_{p \in \mathcal{C}} \alpha(p)\overline{\beta(p)} \cdot \frac{(-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3}{|C_D(p)|} = 0.$$

Das ist ein Widerspruch und zeigt die Injektivität von I.

Für die Surjektivität sei ein B-Element $(c, b_c) \in \mathcal{R}$ mit $c \in Z(P) \setminus \{1\}$ beliebig gegeben. Betrachten wir den dominierten Block $\overline{b_c} \in \mathrm{Bl}(\mathcal{O}[C_G(c)/\langle c \rangle])$, so gilt nach Induktion $l(b_c) = 3$. Nach den Orthogonalitätsrelationen in $\mathrm{Irr}(P)$ und nach Lemma 4.3 ist nun:

$$\sum_{\chi \in \mathrm{im}\, I} m^c_{\chi\chi} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(P)} \mu(c)\overline{\mu(c)} m^c_{\chi_i\chi_i} = 4 \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(P)} \mu(c)\overline{\mu(c)} \cdot \frac{3}{|D|} = 3.$$

Nach [62, Proposition 2.2] ist dies aber gleich der Summe $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m^c_{\chi\chi}$. Da keine Zeile von verallgemeinerten Zerlegungszahlen in d^c verschwindet, folgt hieraus die Surjektivität. □

Nun können wir den Beweis von Satz 4.1 führen.

Korollar 4.7. *Es ist $l(B) = 3$, $k(B) = 4k(P)$ und $k_i(B) = 4k_{2^i}(P)$ für $i \geq 0$.*

Beweis. Aus der Analyse im Beweis von Lemma 4.3 ergibt sich mit Satz 1.50 unmittelbar $k(B) - l(B) = 4k(P) - 3$. Aus Proposition 4.6 folgt $k(B) = 4k(P)$ und somit $l(B) = 3$. Die Höhen der Charaktere ergeben sich unmittelbar aus der Abbildung in Proposition 4.6. □

Es ergibt sich auch, dass alle Vermutungen aus Abschnitt 2 für den Block B erfüllt sind. Alperins Gewichtsvermutung folgt hierbei mit [39, Proposition 5.4], denn D ist die einzige $\mathcal{F}$-zentrische und $\mathcal{F}$-radikale Untergruppe, es gilt $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(D) \cong C_3$ und $H^2(C_3, \mathbb{F}^\times)$ ist nach Satz 1.89 trivial. Alternativ erhalten wir den Wert von $l(B)$ auch aus dem folgenden Resultat, welches den Beweis von Satz 4.1 abschließt.

Proposition 4.8. *Es existiert eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis, sodass B bezüglich dieser Basis die Cartanmatrix*

$$|P|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat.

Beweis. Nach der bisherigen Analyse der verallgemeinerten Zerlegungszahlen, können wir nach dem Algorithmus aus Unterabschnitt 1.14 die gewöhnlichen Zerlegungszahlen bis auf Basiswahl als Basis des orthogonalen Komplements des $\mathbb{Z}$-Moduls aufgespannt von den übrigen Spalten von verallgemeinerten Zerlegungszahlen berechnen. Sei hierfür c eine beliebige $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Spalten von gewöhnlichen Zerlegungszahlen. Wir wählen I und $\chi_1, \ldots, \chi_4$ wie in Proposition 4.6. Aus diesem Satz folgt auch, dass es genügt, c auf $\chi_1, \ldots, \chi_4$ festzulegen. Die restlichen Werte ergeben sich dann durch $*$-Konstruktion mit $\mathrm{Irr}(P)$.

Ist nun ein B-Element $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ und $\varphi \in \mathrm{IBr}(b_u)$ mit $u = pv \in D$, $p \in P$ nichttrivial und $v \in C_2 \times C_2$ beliebig gegeben, so gilt

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} c(\chi)\overline{d^u_\varphi(\chi)} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(P)} c(\chi_i)\mu(1)\overline{d^u_\varphi(\chi_i)\mu(p)} = \sum_{i=1}^{4} c(\chi_i)\overline{d^u_\varphi(\chi_i)} \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(P)} \mu(1)\overline{\mu(p)} = 0$$

nach den Orthogonalitätsrelationen in $\mathrm{Irr}(P)$. Solch eine Spalte c ist also bereits orthogonal zu allen übrigen Spalten von nichtgewöhnlichen Zerlegungszahlen außer eventuell zu d^v mit $v \in C_2 \times C_2$ nichttrivial. Das zu diesem Fall gehörige Skalarprodukt ist

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} c(\chi)\overline{d^v(\chi)} = \sum_{i=1}^{4} c(\chi_i)d^v(\chi_i) \sum_{\mu \in \mathrm{Irr}(P)} \mu(1)\overline{\mu(1)} = |P| \sum_{i=1}^{4} c(\chi_i)d^v(\chi_i).$$

Die Summe $\sum_{i=1}^4 c(\chi_i)d^v(\chi_i)$ muss also verschwinden. Nach Lemma 4.3 existieren Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_4$, sodass $d^v(\chi_i) = \epsilon_i$. Es ist nun leicht eine $\mathbb{Z}$-Basis der Spalten c mit den gewünschten Eigenschaften zu finden. Bis auf Basiswahl gilt also

$$d^1(\chi_i) = \begin{cases} (\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_1) & \text{falls } i = 1, \\ (-\epsilon_2, 0, 0) & \text{falls } i = 2, \\ (0, -\epsilon_3, 0) & \text{falls } i = 3, \\ (0, 0, -\epsilon_4) & \text{falls } i = 4. \end{cases}$$

Die Werte für die übrigen Zeilen ergeben sich durch $*$-Konstruktion mit $\mathrm{Irr}(P)$. Die angegebene Cartanmatrix folgt hieraus durch abermalige Anwendung von Orthogonalitätsrelationen in $\mathrm{Irr}(P)$. □

5 Defektgruppen mit nichttrivialen $2'$-Automorphismen

Craven und Glesser haben in [21] alle 2-Gruppen mit genau drei Involutionen bestimmt, die einen nichttrivialen Automorphismus ungerader Ordnung besitzen. Diese Gruppen sind mit Q_8 die einzigen Kandidaten für wesentliche Untergruppen in einem saturierten Fusionssystem auf einer 2-Gruppe mit genau drei Involutionen. Wir zitieren das Resultat:

Satz 5.1 ([21, Theorem 6.1])**.** *Es sei P eine endliche 2-Gruppe mit genau drei Involutionen. Dann besitzt P genau dann einen nichttrivialen Automorphismus ungerader Ordnung, wenn P eine der folgenden Gruppen ist:*

(i) $Q_8 \times C_{2^n}$ *für ein* $n \geq 1$,

(ii) $Q_8 \times Q_{2^n}$ *für ein* $n \geq 3$,

(iii) $C_{2^n} \times C_{2^n}$ *für ein* $n \geq 1$,

(iv) X_n *für* $n \geq 7$,

(v) Y_n *für* $n \geq 6$,

(vi) Suz.

Hierbei sind X_n und Y_n die Gruppen mit Ordnung 2^n und den Präsentationen

$$\begin{aligned} X_n = \langle r, s, t, u :& r^4 = t^{2^{n-4}} = 1, s^2 = r^2, r^{-1}sr = s^{-1}, \\ & u^2 = t^{2^{n-5}}, u^{-1}tu = t^{-1}r^2, [r,t] = [s,t] = [r,u] = [s,u] = 1\rangle \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Y_n = \langle r, s, t, u :& r^4 = t^{2^{n-4}} = 1, s^2 = r^2, r^{-1}sr = s^{-1}, \\ & u^2 = r^2 t^{2^{n-5}}, u^{-1}tu = t^{-1}, [r,t] = [s,t] = [r,u] = [s,u] = 1\rangle. \end{aligned}$$

Hierbei ist jeweils $\langle r, s, t\rangle \cong Q_8 \times C_{2^{n-4}}$ eine Untergruppe vom Index zwei. Die Gruppe Suz ist eine 2-Sylowgruppe von $\mathrm{PSU}(3,4)$ mit Ordnung 64.

In diesem Abschnitt untersuchen wir Blöcke, deren Defektgruppe eine Gruppe aus Satz 5.1 ist. Defektgruppen $Q_8 \times C_{2^n}$ wurden bereits in [77] behandelt. In Unterabschnitt 3.3 haben wir sogar die Cartanmatrix solcher Blöcke bestimmen können. Blöcke mit homozyklischen Defektgruppen $C_{2^n} \times C_{2^n}$ wurden von Sambale in [83] untersucht.

In Unterabschnitt 5.1 bestimmen wir Blockinvarianten für kontrollierte Blöcke mit Defektgruppen X_n oder Y_n. Nach der Analyse der Fusionssysteme in [67, Theorem 7.3] behandeln wir damit alle saturierten Fusionssysteme auf Y_n. Auf der Gruppe X_n existieren für $n \geq 7$ nach demselben Satz noch zwei weitere saturierte Fusionssysteme, welche wir hier nicht untersuchen wollen. Unterabschnitt 5.2 beschäftigt sich mit Defektgruppen Suz. Nach [21, Theorem 5.3] ist Suz resistent und mögliche Trägheitsgruppen für Blöcke mit dieser Defektgruppe sind 1, C_3, C_5 und C_{15}. Wir werden nur den Fall des Trägheitsindex 3 untersuchen. In Unterabschnitt 5.3 schließlich untersuchen wir Defektgruppen $Q_{2^n} \times Q_8$. Allerdings werden wir ausschließlich Fusionssysteme betrachten, die auf dem zweiten Faktor Q_8 trivial operieren. Nach [67, Theorem 7.2] existieren noch einige weitere saturierte Fusionssysteme auf solchen Gruppen. Die Blockinvarianten sind in diesen Fällen jedoch schwerer zu ermitteln.

5.1 Kontrollierte Blöcke mit Defektgruppen X_n oder Y_n

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir Blöcke B von G mit Defektgruppe $D = X_n$ $(n \geq 7)$ oder $D = Y_n$ $(n \geq 6)$. Wir nutzen für D die Präsentationen aus dem Beginn des Abschnitts. Eine

Auflistung der möglichen Fusionssysteme $\mathcal{F}$ auf D ist in [67, Theorem 7.3] zu finden.

Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit Fällen beschäftigen, in denen $\mathcal{F}$ die Form $\mathcal{F}_D(D \rtimes A)$ für eine $2'$-Untergruppe $A \leq \operatorname{Aut}(D)$ hat. Nach [21, Theorem 6.1] ist $\mathcal{F}$ dann nilpotent oder es ist $A \cong C_3$. Zur Untersuchung der Blockinvarianten bestimmen wir zunächst die irreduziblen komplexen Charaktere von D.

Lemma 5.2. *Repräsentanten der Konjugationsklassen von D sind:*

- qt^z *für* $q \in \{1, r^2, r, s, rs\}$ *und* $z \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}$. *Diese Elemente liegen im Normalteiler* $N := \langle r, s, t\rangle$. *Für die Zentralisatoren gilt*

$$C_D(qt^z) \cong \begin{cases} D & \text{falls } q \in \{1, r^2\} \text{ und } z \in \{0, 2^{n-5}\}, \\ Q_8 \times C_{2^{n-4}} & \text{falls } q \in \{1, r^2\} \text{ und } z \notin \{0, 2^{n-5}\}, \\ Q_{2^{n-3}} \times C_4 & \text{falls } q \in \{r, s, rs\} \text{ und } z \in \{0, 2^{n-5}\}, \\ C_{2^{n-4}} \times C_4 & \text{falls } q \in \{r, s, rs\} \text{ und } z \notin \{0, 2^{n-5}\}. \end{cases}$$

- qt^zu *für* $q \in \{1, r^2, r, s, rs\}$ *und* $z \in \{0, 1\}$. *Diese Elemente liegen außerhalb von* N. *Die Zentralisatoren ergeben sich zu*

$$C_D(qt^zu) \cong \begin{cases} Q_8 \times C_4 & \text{falls } q \in \{1, r^2\}, \\ C_4 \times C_4 & \text{falls } q \in \{r, s, rs\}. \end{cases}$$

Die irreduziblen Charaktere von D sind:

(i) Lineare Charaktere aus der Inflation von $\operatorname{Irr}(D/\Phi(D))$: *Die Werte auf den Konjugationsklassen ergeben sich je nach Zugehörigkeit zu den Nebenklassen nach* $\Phi(D) = \langle r^2, t^2\rangle$. *Sind* $w, w', x, x', y, y', z, z' \in \{0, 1\}$ *beliebig gegeben, so haben wir die Charaktere*

$$\mu_{1,x+2y+4z+8w}|_{r^{x'}s^{y'}t^{z'}u^{w'}\Phi(D)} = (-1)^{ww'+xx'+yy'+zz'}.$$

(ii) Induzierte Charaktere von N: Es sei $\zeta := \zeta_{2^{n-4}}$ *eine primitive* 2^{n-4}*-te Einheitswurzel. Weiter sei* $\zeta_+^{i,z} := \zeta^{iz} + \zeta^{-iz}$ *und*

$$\zeta_-^{i,z} = \begin{cases} \zeta^{iz} - \zeta^{-iz} & \text{falls } D = X_n \text{ und } z \text{ ungerade}, \\ \zeta^{iz} + \zeta^{-iz} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich die Charaktere:

	1	r^2	r	s	rs	t^z	r^2t^z	rt^z	st^z	rst^z
$\mu_{2,i}$	2	2	2	2	2	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$
$\mu_{3,i}$	2	2	-2	-2	2	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$
$\mu_{4,i}$	2	2	-2	2	-2	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$
$\mu_{5,i}$	2	2	2	-2	-2	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$	$-\zeta_+^{i,z}$
$\mu_{6,i}$	4	-4	0	0	0	$2\zeta_-^{i,z}$	$-2\zeta_-^{i,z}$	0	0	0

Hierbei sind $i, z \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$. *Die Werte an den Stellen* $qt^{2^{n-5}}$ *für* $q \in \{1, r^2, r, s, rs\}$ *sind gleich den Werten an der Stelle q für gerades i und sie sind gleich dem Negativen davon für ungerades i. Auf Konjugationsklassen außerhalb von N verschwinden die Charaktere.*

(iii) Vier weitere Charaktere vom Grad 2: Für $D = X_n$ *sind die folgenden Charaktere irreduzibel:*

	$r^{2l}(r^2t^2)^k$	$r^{2l}t(r^2t^2)^k$	$r^{2l}(r^2t^2)^ku$	$r^{2l}t(r^2t^2)^ku$
$\mu_{7,1}$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,2}$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,3}$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$	$-2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,4}$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$	$-2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$

Für $D = Y_n$ sind es die Folgenden:

	$r^{2l}t^{2k}$	$r^{2l}t^{2k}u$	$r^{2l}t^{2k+1}$	$r^{2l}t^{2k+1}u$
$\mu_{7,1}$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,2}$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,3}$	$2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$	$-2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$
$\mu_{7,4}$	$2 \cdot (-1)^l$	$-2i \cdot (-1)^l$	$-2 \cdot (-1)^l$	$2i \cdot (-1)^l$

Hierbei ist stets $k \in \mathbb{Z}$ und $l \in \{0, 1\}$. Die Charaktere verschwinden auf den restlichen Konjugationsklassen.

Beweis. Die Untergruppe $N \cong Q_8 \times C_{2^{n-4}}$ ist normal in D. Sie besitzt bekanntlich genau $5 \cdot 2^{n-4}$ Konjugationsklassen mit Repräsentanten qt^z für $q \in \{1, r^2, r, s, rs\}$ und $z \in \{0, \ldots, 2^{n-4} - 1\}$. Zusätzliche Konjugation mit u fusioniert diese zu $5 \cdot (2^{n-5} + 1)$ Konjugationsklassen von D in N mit Repräsentanten qt^z für $q \in \{1, r^2, r, s, rs\}$ und $z \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}$. Wir bestimmen die Gestalt der Zentralisatoren dieser Elemente:

- Ist $q \in \{1, r^2\}$ und $z \in \{0, 2^{n-5}\}$, so liegt qt^z offenbar im Zentrum von D.
- Für $q \in \{1, r^2\}$ und $z \notin \{0, 2^{n-5}\}$ ergibt sich sicher $C_D(qt^z) \geq N \cong Q_8 \times C_{2^{n-4}}$. Umgekehrt hat die Konjugationsklasse von qt^z die Länge 2 und es folgt $C_D(qt^z) = N$.
- Ist $q \in \{r, s, rs\}$ und $z \in \{0, 2^{n-5}\}$, so ist $C_D(qt^z) \geq \langle q, t, u\rangle$. Für $D = X_n$ ist $\langle qt, u\rangle \cong Q_{2^{n-3}}$ und somit $\langle q, t, u\rangle \cong Q_{2^{n-3}} \times C_4$. Für $D = Y_n$ hingegen ist $\langle t, qu\rangle \cong Q_{2^{n-3}}$, was ebenfalls $\langle q, t, u\rangle \cong Q_{2^{n-3}} \times C_4$ impliziert. Da qt^z in diesem Fall sicher nicht zentral ist, folgt $C_D(qt^z) \cong Q_{2^{n-3}} \times C_4$.
- Für $q \in \{r, s, rs\}$ und $z \notin \{0, 2^{n-5}\}$ ergibt sich schließlich $C_D(qt^z) \geq \langle q, t\rangle \cong C_{2^{n-4}} \times C_4$. Umgekehrt enthält die Konjugationsklasse von qt^z offenbar wenigstens vier verschiedene Elemente und die Behauptung $C_D(qt^z) \cong C_{2^{n-4}} \times C_4$ folgt.

Ein Element außerhalb von N hat die Form qt^zu für $q \in \langle r, s\rangle$ und $z \in \{0, \ldots, 2^{n-4} - 1\}$. Diese Elemente sind mittels r oder s zu $q^{-1}t^zu$ konjugiert. Konjugation mit t ergibt weiter

$$t(qt^zu)t^{-1} = qt^z \cdot tut^{-1} = qt^{z+1} \cdot t^{2^{n-5}}u^{-1}t^{-1}uu^{-1} = qt^{z+1} \cdot t^{2^{n-5}}tr^2u^{-1} = qt^{z+2}r^2u$$

für $D = X_n$ und

$$t(qt^zu)t^{-1} = qt^z \cdot tut^{-1} = qt^{z+1} \cdot r^2t^{2^{n-5}}u^{-1}t^{-1}uu^{-1} = qt^{z+1} \cdot r^2t^{2^{n-5}}tu^{-1} = qt^{z+2}u$$

für $D = Y_n$. Iterative Anwendung liefert nun höchstens 10 verschiedene Konjugationsklassen mit Repräsentanten, wie sie im Lemma angegeben sind. Diese Konjugationsklassen haben für $q \in Z(\langle r, s\rangle)$ mindestens die Länge 2^{n-5} und für $q \notin Z(\langle r, s\rangle)$ mindestens die Länge 2^{n-4}. Für die umgekehrte Ungleichung untersuchen wir in diesen beiden Fällen die Gestalt des Zentralisators:

- Ist $q \in Z(\langle r, s\rangle)$, so gilt $C_D(qt^zu) \geq \langle r, s, t^zu\rangle$. Wir berechnen

  $$(t^zu)^2 = t^{2^{n-5}}t^zu^{-1}t^zu = t^{2^{n-5}}t^zt^{-z}r^{2z} = t^{2^{n-5}}r^{2z}$$

  für $D = X_n$ und

  $$(t^zu)^2 = r^2t^{2^{n-5}}t^zu^{-1}t^zu = r^2t^{2^{n-5}}t^zt^{-z} = r^2t^{2^{n-5}}$$

  für $D = Y_n$. Das Element t^zu hat also stets Ordnung 4 und es gilt $(t^zu)^2 \notin \langle r, s\rangle$. Somit folgt $\langle r, s, t^zu\rangle \cong Q_8 \times C_4$ und $|C_D(qt^zu)| \geq 32$. Die Bahngleichung liefert dann $C_D(qt^zu) \cong Q_8 \times C_4$. Weiter haben diese Bahnen tatsächlich die Länge 2^{n-5}.
- Ist $q \notin Z(\langle r, s\rangle)$, so ist $C_D(qt^zu) \geq \langle q, t^zu\rangle$. Wie oben zeigt man dann $C_D(qt^zu) \cong C_4 \times C_4$. Die Bahnlänge ist in diesem Fall also tatsächlich 2^{n-4}.

Wir bestimmen nun zunächst irreduzible Charaktere von D, welche sich durch Induktion von irreduziblen Charakteren von N ergeben. Die Charaktertafel von N ergibt sich als Kronecker-Produkt der Charaktertafeln von Q_8 und $C_{2^{n-4}}$ und ist somit bekannt. Induktion dieser Charaktere liefert die Charaktere in (ii). Durch Induktion erhaltene Charaktere von D, die nicht irreduzibel sind, haben wir hierbei weggelassen. Die aufgelisteten Charaktere sind offenbar paarweise verschieden und nach dem Satz von Clifford tatsächlich irreduzibel. Insgesamt ergeben sich so $2^{n-3}-4$ Charaktere vom Grad 2 und $2^{n-5}-1$ Charaktere vom Grad 4.

Zur Bestimmung der übrigen irreduziblen Charaktere betrachten wir Inflationen von irreduziblen Charakteren von Quotienten von D. Die 16 linearen Charaktere in (i) ergeben sich durch Inflation von $D/\Phi(D) \cong C_2^4$, was sich mit nach [67, Lemma 2.1] ergibt.

Für $D = X_n$ betrachten wir weiter die normale Untergruppe $N_2 := \langle u, r^2t^2\rangle$. Man rechnet leicht nach, dass D/N_2 dann ein Zentralprodukt $Q_8 * C_4$ ist. Beispielsweise mit GAP berechnet man die Charaktertafel von D/N_2. Jeder der irreduziblen Charaktere vom Grad 2 von D/N liefert dann einen irreduziblen Charakter vom Grad 2 von D. Multiplikation mit den obigen linearen Charakteren $\mu_{1,0}$, $\mu_{1,4}$, $\mu_{1,8}$ und $\mu_{1,12}$ ergibt so die 4 Charaktere in (iii). Für $P = Y_n$ erhalten wir mit $N_2 := \langle t\rangle$ analoge Resultate. Die konstruierten Charaktere erhält man jeweils auch durch Einschränkung von geeigneten Charakteren des direkten Produkts $Q_8 \times C_4$.

Berechnung der Summe über die Quadrate der Grade der bisher gefundenen irreduziblen Charaktere liefert die Summe 2^n. Wir haben somit alle irreduziblen Charaktere von D gefunden. □

Die Bezeichnungen der Charaktere aus Lemma 5.2 werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden. Aus dem Lemma folgen mit Satz 1.46 unmittelbar die Blockinvarianten im nilpotenten Fall.

Korollar 5.3. *Ist B nilpotent, so gelten $l(B) = 1$, $k(B) = 5\cdot 2^{n-5}+15$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 2^{n-3}$ und $k_2(B) = 2^{n-5}-1$. Die Cartanmatrix ist (2^n).*

Von nun an können wir also von $A \cong C_3$ ausgehen. Wir berechnen zunächst ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen.

Lemma 5.4. *Die Paare der Form (qt^y, b_{qt^y}) und (qt^zu, b_{qt^zu}) mit $q \in \{1, r^2, r\}$, $y \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}$ und $z \in \{0,1\}$ bilden ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Für $(v, b_v) \in \mathcal{R}$ hat hierbei b_v stets die Defektgruppe $C_D(v)$.*

Beweis. Die Operation von A fixiert die Elemente r^2, t und u und permutiert die Elemente r, s und rs. Die Aussage ergibt sich nun mit der Auflistung der Konjugationsklassen von D in Lemma 5.2 unmittelbar aus Lemma 1.49. □

Zur Untersuchung der Struktur von $\operatorname{Irr}(B)$ wollen wir die $*$-Konstruktion verwenden. Hierfür ist es notwendig $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere von D zu finden.

Lemma 5.5. *Die folgenden verallgemeinerten Charaktere von D sind $\mathcal{F}$-stabil:*

(i) $\mu_{1,i}$ *für* $i \in \{0,4,8,12\}$,

(ii) $\lambda_i := \mu_{1,i+1} + \mu_{1,i+2} + \mu_{1,i+3} - 2\mu_{1,i}$ *für* $i \in \{0,4,8,12\}$,

(iii) $\mu_{2,i}$ *für* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-5}-1\}$,

(iv) $\mu_{6,i}$ *für* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-5}-1\}$,

(v) $\mu_{7,i}$ *für* $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Werten der Charaktere in Lemma 5.2. Zu beachten ist hierbei, dass A die Elemente r^2, t und u festhält. □

Die Bezeichnungen für die obigen Charaktere werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden. Aus den $\mathcal{F}$-stabilen linearen Charaktere ergibt sich die Struktur der Fokalgruppe.

Lemma 5.6. *Es ist*

$$\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \langle r, s, t^2 \rangle$$

und

$$\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}) = \{\mu_{1,0}, \mu_{1,4}, \mu_{1,8}, \mu_{1,12}\}.$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Operation von A und aus der Gestalt der linearen Charaktere in Lemma 5.2. □

Zur Berechnung von Skalarprodukten von verallgemeinerten Charakteren, die wir durch die $*$-Konstruktion konstruieren werden, benötigen wir Beiträge $m_{\chi\chi}^v$ für alle B-Elemente $(v, b_v) \in \mathcal{R}$ und ein $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Hierfür bieten sich Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ an, denn über die Zerlegungszahlen dieser Charaktere haben wir mehr Informationen.

Lemma 5.7. *Es sei $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig. Der Beitrag $m_{\chi\chi}^v$ des B-Elements $(v, b_v) \in \mathcal{R}$ zum Skalarprodukt $(\chi, \chi)_G$ ist dann*

$$|C_D(v)| m_{\chi\chi}^v = \begin{cases} 3 & \text{falls } v = qt^z \text{ mit } q \in \{1, r^2\} \text{ und } z \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}, \\ 1 & \text{falls } v = rt^z \text{ mit } z \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}, \\ 3 & \text{falls } v = qt^z u \text{ mit } q \in \{1, r^2\} \text{ und } z \in \{0, 1\}, \\ 1 & \text{falls } v = rt^z u \text{ mit } z \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Beweis. Aus der Operation von A folgt, dass die Blöcke b_{rt^y} und $b_{rt^z u}$ mit $y \in \{0, \ldots, 2^{n-5}\}$ und $z \in \{0, 1\}$ nilpotent sind. Die Blöcke b_v für die übrigen v haben Trägheitsindex 3. Ist zusätzlich $v \notin Z(D)$, so folgt mit Lemma 5.2, Proposition 3.17 und Bemerkung 1.68 (ii), dass diese Blöcke bis auf eine Basiswahl die Cartanmatrix

$$\frac{|C_D(v)|}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

haben. Der Block b_{r^2} dominiert wie üblich einen Block $\overline{b_{r^2}}$ von $C_G(r^2)/\langle r^2 \rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle r^2 \rangle \cong Q_{2^{n-3}} \times C_2 \times C_2$. Der Block ist kontrolliert mit Trägheitsindex 3 und in dem zugehörigen Fusionssystem sind nichttriviale Elemente des Faktors $C_2 \times C_2$ fusioniert. Somit ist Satz 4.1 anwendbar und b_{r^2} hat die Cartanmatrix

$$2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl.

Wir schätzen nun den rationalen Teil der $m_{\chi\chi}^v$ für $(v, b_v) \in \mathcal{R}$ ab. Ist $v \notin \{1, t^{2^{n-5}}, r^2 t^{2^{n-5}}\}$, so ergibt sich aus Satz 1.65 und Lemma 1.67, dass der rationale Teil von $m_{\chi\chi}^v$ mindestens so groß ist, wie in der Formel im Lemma angegeben. Gleichheit tritt hierbei jeweils nur dann auf, wenn die zugehörigen verallgemeinerten Zerlegungszahlen ganzzahlige Vektoren multipliziert mit $|D|$-ten Einheitswurzeln sind. Die Beiträge $m_{\chi\chi}^v$ sind gegebenenfalls also rational. Ist $v \in \{1, t^{2^{n-5}}, r^2 t^{2^{n-5}}\}$, so sind die Beiträge $m_{\chi\chi}^v$ rational und es gilt $m_{\chi\chi}^v \geq \frac{1}{2^n}$. Summieren wir nun über die angegebenen Mindestwerte für rationale Teile der $m_{\chi\chi}^v$, so ergibt sich die Summe

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n-2}} \cdot (2^{n-5} - 1) + \frac{1}{16} \cdot 2 + \frac{3}{2^{n-1}} \cdot 2(2^{n-5} - 1) + \frac{3}{32} \cdot 4 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot 3 = \frac{2^n - 6}{2^n}.$$

Die tatsächliche Summe über die Beiträge ist 1 nach Satz 1.63. Hieraus folgt mit Satz 1.65 und Lemma 1.67, dass der rationale Teil von $m_{\chi\chi}^v$ für die $(v, b_v) \in \mathcal{R}$, für die b_v nicht nilpotent und $v \notin Z(D)$ ist, tatsächlich gleich $\frac{3}{|C_D(v)|}$ ist. Aus dem Gleichheitsfall in Lemma 1.67 folgt nun, dass die Formel im Lemma für diese v richtig ist.

Um bessere Abschätzungen für die übrigen v zu bekommen, wenden wir die $*$-Konstruktion an. Die Charaktere $\mu_{7,i}$ sind nach Lemma 5.5 für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ $\mathcal{F}$-stabil. Folglich ist $\mu_{7,i} * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Setzen wir $S := m^1_{\chi\chi} + m^{r^2}_{\chi\chi} + m^{t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi} + m^{r^2 t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi}$, so berechnet man:

$$(\mu_{7,i} * \chi, \mu_{7,i} * \chi)_G = 4S + 4\left(2 \cdot (2^{n-5} - 1) \cdot \frac{3}{2^{n-1}} + 4 \cdot \frac{3}{32}\right) = 4S + 3 - \frac{48}{2^n}.$$

Die Summe S ist nach obiger Analyse gleich $\frac{k}{2^n}$ für ein $k \in \{6, \ldots, 12\}$. Außerdem ist $(\mu_{7,i} * \chi, \mu_{7,i} * \chi)_G$ ganzzahlig. Es folgt $(\mu_{7,i} * \chi, \mu_{7,i} * \chi)_G = 3$ und $S = \frac{12}{2^n}$. Nach obiger Abschätzung der rationalen Parts der $m^v_{\chi\chi}$ folgt somit, dass die Formel im Lemma für $v \notin Z(D)$ richtig ist.

Zur Untersuchung des Falls $v \in Z(D)$ nutzen wir wieder die $*$-Konstruktion. Der Charakter $\mu_{2,1}$ ist nach Lemma 5.5 $\mathcal{F}$-stabil. Setzen wir nun

$$T := m^1_{\chi\chi} - m^{r^2}_{\chi\chi} - m^{t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi} + m^{r^2 t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi},$$

so ergibt sich

$$(\mu_{2,1} * \chi, \mu_{7,i} * \chi)_G = 4T + \sum_{z=1}^{2^{n-5}-1} (\zeta^z + \zeta^{-z}) \cdot (\alpha_z - \alpha_z) = 4T,$$

wobei $\frac{2^{n-1}}{3} \cdot \alpha_z \in \{\pm 2, \pm 2i\}$. Das Skalarprodukt ist wiederum ganzzahlig, d.h. $T = 0$. Der triviale Charakter $\mu_{1,0}$ ist ebenfalls $\mathcal{F}$-stabil. Setzen wir

$$U := m^1_{\chi\chi} - m^{r^2}_{\chi\chi} + m^{t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi} - m^{r^2 t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi},$$

so erhalten wir analog

$$(\mu_{1,0} * \chi, \mu_{7,i} * \chi)_G = 2U.$$

Hierbei nutzen wir, wie bereits bei der Berechnung von $(\mu_{2,1} * \chi, \mu_{7,1} * \chi)_G$, dass $\chi_{7,i}(r^2 v) = -\chi_{7,i}(v)$ für $v \in D$ gilt. Dieses Skalarprodukt ist nun ebenfalls ganzzahlig, d.h. $U = 0$. Addition und Subtraktion von T und U liefert $m^1_{\chi\chi} = m^{r^2}_{\chi\chi}$ und $m^{t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi} = m^{r^2 t^{2^{n-5}}}_{\chi\chi}$. Ist die Behauptung für die $m^v_{\chi\chi}$ im Lemma falsch, so ist mit $S = \frac{12}{2^n}$ folglich entweder $m^{r^2}_{\chi\chi} < \frac{3}{2^n}$ oder $\frac{3}{2^n} < m^{r^2}_{\chi\chi} \le \frac{5}{2^n}$. Beide Möglichkeiten widersprechen Satz 1.65 und Lemma 1.67. Die Behauptung folgt. □

Korollar 5.8. *Es seien λ und μ $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere von D. Weiter sei $E := \langle r^2, t, u \rangle$. Dann ist für $\chi \in \operatorname{Irr}_0(B)$*

$$(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G = \frac{1}{3}(\lambda, \mu)_D + \frac{2}{3}(\lambda_E, \mu_E)_E.$$

Beweis. Mit $\mathcal{R}_1$ bzw. $\mathcal{R}_3$ bezeichnen wir die Menge der Elemente $(v, b_v) \in \mathcal{R}$, für die $|C_D(v)| m^v_{\chi\chi} = 1$ bzw. $|C_D(v)| m^v_{\chi\chi} = 3$ gilt. Nach Lemma 5.7 ist $(v, b_v) \in \mathcal{R}_3$ hierbei zu $v \in E$ (und $(v, b_v) \in \mathcal{R}$) äquivalent. Die Untergruppe E enthält sogar die $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen der Elemente aus $\mathcal{R}_3$. Wie im Beweis von Lemma 5.4 festgestellt, bestehen die $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen von Elementen aus $\mathcal{R}_1$ jeweils aus genau drei D-Konjugationsklassen gleicher Länge. Die $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen der Elemente aus $\mathcal{R}_3$ sind D-Konjugationsklassen. Mit $|D : E| = 4$ folgt somit

$$\begin{aligned}
(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G &= \sum_{(v,b_v) \in \mathcal{R}_1} \frac{\lambda(v)\overline{\mu(v)}}{|C_D(v)|} + \sum_{(v,b_v) \in \mathcal{R}_3} \frac{3\lambda(v)\overline{\mu(v)}}{|C_D(v)|} \\
&= \frac{1}{|D|} \sum_{v \in D \setminus E} \lambda(v)\overline{\mu(v)} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{|D|} \sum_{v \in E} \lambda(v)\overline{\mu(v)} \cdot 3 \\
&= \frac{1}{|D|} \sum_{v \in D} \lambda(v)\overline{\mu(v)} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{|D|} \sum_{v \in E} \lambda(v)\overline{\mu(v)} \cdot \frac{8}{3} \\
&= \frac{1}{3}\langle \lambda, \mu \rangle_D + \frac{2}{3}\langle \lambda_E, \mu_E \rangle_E.
\end{aligned}$$

□

Wie üblich erhalten wir untere Schranken für $k(B)$ und $l(B)$ mit Satz 1.50 und Satz 1.51.

Lemma 5.9. *Es ist* $l(B) \geq 3$ *und* $k(B) - l(B) \geq 7 \cdot 2^{n-5} + 18$.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 5.7 dominiert der Block b_{r^2} einen Block $\overline{b_{r^2}}$ von $C_G(r^2)/\langle r^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle r^2\rangle$ und $l(\overline{b_{r^2}}) = 3$. Wegen $r^2 \in Z(\mathcal{F})$ gilt nach Satz 1.51 dann $l(B) \geq l(b_{r^2}) = l(\overline{b_{r^2}}) = 3$. Für $v \in \{t^{2^{n-5}}, r^2t^{2^{n-5}}\}$ ist $r^2 \in Z(\mathcal{F}_D(b_v))$. Wir bezeichnen mit (r^2, c_{r^2}) das entsprechende b_v-Element. Dann dominiert c_{r^2} wie oben einen Block $\overline{c_{r^2}}$ von $C_G(v, r^2)/\langle r^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle r^2\rangle$. Wieder gilt $l(b_v) \geq l(c_{r^2}) = l(\overline{c_{r^2}}) = 3$.

Zur Abschätzung von $k(B) - l(B)$ nutzen wir nun die Formel aus Satz 1.50. Die Werte $l(b_v)$ für die übrigen $(v, b_v) \in \mathcal{R}$ ermitteln wir wie im Beweis von Lemma 5.7. Wie gewünscht, ergibt sich

$$k(B) - l(B) \geq 3 + 3 + 3 + 2 \cdot (2^{n-5} - 1) \cdot 3 + (2^{n-5} + 1) \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 7 \cdot 2^{n-5} + 18. \qquad \square$$

Nun werden wir nacheinander die irreduziblen Charaktere von B konstruieren. Wir beginnen mit den Charakteren von Höhe 0.

Proposition 5.10. *Es gibt genau* 16 *Charaktere von Höhe* 0 *in* B. *Diese zerfallen unter der Operation von* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ *in vier Bahnen.*

Beweis. Nach Lemma 5.5 ist der verallgemeinerte Charakter λ_i für $i \in \{0, 4, 8, 12\}$ $\mathcal{F}$-stabil. Ist also $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben, so ist $\lambda_i * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Es ist $(\lambda_i)_E = (\mu_{1,i})_E$. Insbesondere sind die Einschränkungen der λ_i auf E für verschiedene i verschiedene lineare Charaktere. Unter Verwendung von Korollar 5.8 berechnen wir nun für $i, j \in \{0, 4, 8, 12\}$

$$(\lambda_i * \chi, \lambda_j * \chi)_G = \frac{1}{3}(\lambda_i, \lambda_j)_D + \frac{2}{3}((\lambda_i)_E, (\lambda_j)_E)_E = \frac{7}{3}\delta_{i,j} + \frac{2}{3}\delta_{i,j} = 3\delta_{i,j}.$$

Folglich ist $\lambda_i * \chi$ eine Summe

$$\lambda_i * \chi = \epsilon_{i+1}\chi_{i+1} + \epsilon_{i+2}\chi_{i+2} + \epsilon_{i+3}\chi_{i+3}$$

mit Vorzeichen $\epsilon_{i+1}, \epsilon_{i+2}, \epsilon_{i+3}$ von drei irreduziblen Charakteren $\chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \chi_{i+3}$ von B. Nach Lemma 5.6 operiert die Gruppe $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf der Menge der λ_i und auf den zwölf irreduziblen Charakteren, die als Summanden auftauchen. Mit Lemma 1.83 folgt dann, dass diese zwölf Charaktere tatsächlich paarweise verschieden sind. Wir erhalten also als Summanden insgesamt drei $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Orbits von jeweils vier Charakteren. Eine weitere $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn ist die Bahn von χ. Da nach Korollar 5.8

$$(\chi, \lambda_i * \chi)_G = \frac{1}{3}(\mu_{1,0}, \lambda_i)_D + \frac{2}{3}((\mu_{1,0})_E, (\lambda_i)_E)_E = -\frac{2}{3}\delta_{0,i} + \frac{2}{3}\delta_{0,i} = 0$$

für $i \in \{0, 4, 8, 12\}$ gilt, ist diese Bahn verschieden von den drei Bahnen der Summanden. Setzen wir $\chi_i = \mu_{1,i} * \chi$, so erhalten wir also insgesamt die 16 verschiedenen Charaktere $\chi_0, \ldots, \chi_{15}$.

Wir betrachten nun den Block b_{ru}. Wie in Lemma 5.2 festgestellt, hat dieser Block eine Defektgruppe, die zu $C_4 \times C_4$ isomorph ist. Die Cartanmatrix ergibt sich zu (16). Nach Satz 1.65 verschwinden die Zerlegungszahlen $d^{ru}(\chi_i)$ für $i \in \{0, 4, 8, 12\}$ nicht. Es ist $\lambda_i(ru) = -3$ für $i \in \{0, 4\}$ und es ist $\lambda_i(ru) = 3$ für $i \in \{8, 12\}$ Betrachten wir also die zugehörigen Zerlegungszahlen $d^{ru}(\lambda_i * \chi)$, so ergibt sich

$$\pm 3d^{ru}(\chi) = \epsilon_{i+1}d^{ru}(\chi_{i+1}) + \epsilon_{i+2}d^{ru}(\chi_{i+2}) + \epsilon_{i+3}d^{ru}(\chi_{i+3})$$

für alle $i \in \{0, 4, 8, 12\}$. Da b_{ru} die Cartanmatrix (16) hat, folgt hieraus leicht, dass alle $d^{ru}(\chi_k)$ für $k \in \{0, \ldots, 15\}$ Einheitswurzeln sind. Hieraus folgt mit Satz 1.65 unmittelbar, dass diese Charaktere genau die Charaktere von Höhe 0 in B sind. $\square$

Durch weitere Anwendung der $*$-Konstruktion erhalten wir im Folgenden eine Reihe von irreduziblen Charakteren mit Höhe 1.

Proposition 5.11. *Ist* $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ *und* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$*, so ist* $\psi_{\chi,i} := \mu_{2,i} * \chi \in \mathrm{Irr}_1(B)$*. Ist weiter* $j \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$ *mit* $i \neq j$*, so sind hierbei die Charaktere* $\psi_{\chi,i}$ *und* $\psi_{\chi,j}$ *verschieden. Stammt* $\chi' \in \mathrm{Irr}_0(B)$ *aus einer anderen* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$*-Bahn als* χ*, so sind die Charaktere* $\psi_{\chi,i}$ *und* $\psi_{\chi',j}$ *für beliebige* $i, j \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$ *voneinander verschieden.*

Beweis. Mit Lemma 5.7 und dem Beweis von Lemma 5.2 berechnen wir:

$$(\mu_{2,i} * \chi, \mu_{2,i} * \chi)_G = \frac{3}{2^n} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 4 \cdot 2 + (2^{n-4} - 4) \cdot \left(\frac{3}{2^{n-1}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = 1.$$

Der verallgemeinerte Charakter $\mu_{2,i} * \chi$ ist also bis auf ein Vorzeichen ein irreduzibler Charakter von B. Wegen $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und $\mu_{2,i}(1) = 2$ ist das Vorzeichen hierbei positiv und es folgt $\psi_{\chi,i} = \mu_{2,i} * \chi \in \mathrm{Irr}_1(B)$. Anwendung von Korollar 5.8 ergibt, dass die Einschränkung $(\mu_{2,i})_E$ irreduzibel ist. Offenbar sind diese Einschränkungen für verschiedene i auch paarweise verschieden, sodass nochmalige Anwendung von Korollar 5.8

$$(\mu_{2,i} * \chi, \mu_{2,j} * \chi)_G = 0$$

für $i, j \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$ mit $i \neq j$ liefert. Die Charaktere $\psi_{\chi,i}$ sind also für verschiedene i voneinander verschieden.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\psi_{\chi,i}$ und $\psi_{\chi',j}$ für $\chi, \chi' \in \mathrm{Irr}_0(B)$ aus verschiedenen $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen und $i, j \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$ verschieden sind. Wir nehmen das Gegenteil an. Wie im Beweis von Proposition 5.10 existiert ein $k \in \{0, 4, 8, 12\}$, sodass χ' Summand (mit Vorzeichen) von $\lambda_k * \chi$ ist. Der verallgemeinerte Charakter $\lambda_k * \chi$ ist hierbei eine vorzeichenbehaftete Summe von drei verschiedenen Charakteren aus $\mathrm{Irr}_0(B)$. Wiederum wie im Beweis von Proposition 5.10 ist $(\lambda_k)_E = (\mu_{1,k})_E \in \mathrm{Irr}_1(E)$. Die Einschränkung $(\mu_{2,j})_E$ ist, wie bereits gezeigt, ein irreduzibler Charakter. Folglich ist $(\mu_{2,j}\lambda_k)_E$ irreduzibel und mit Korollar 5.8 ergibt sich

$$(\mu_{2,j} * (\lambda_k * \chi), \mu_{2,j} * (\lambda_k * \chi))_G = \frac{1}{3}(\mu_{2,j}\lambda_k, \mu_{2,j}\lambda_k)_D + \frac{2}{3}((\mu_{2,j}\lambda_k)_E, (\mu_{2,j}\lambda_k)_E)_E = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3.$$

Somit ist $\mu_{2,j} * (\lambda_k * \chi)$ eine vorzeichenbehaftete Summe von drei verschiedenen Charakteren aus $\mathrm{Irr}_1(B)$ und $\psi_{\chi',j} = \psi_{\chi,i}$ ist einer dieser Summanden. Das bedeutet

$$(\mu_{2,i} * \chi, \mu_{2,j} * (\lambda_k * \chi))_G \neq 0.$$

Mit Korollar 5.8 berechnet man aber

$$\begin{aligned}(\mu_{2,i} * \chi, \mu_{2,j} * (\lambda_k * \chi))_G &= \frac{1}{3}(\mu_{2,i}, \mu_{2,j}\lambda_k)_D + \frac{2}{3}((\mu_{2,i})_E, (\mu_{2,j}\lambda_k)_E)_E \\ &= \frac{1}{3}(\mu_{2,i}, -2\mu_{2,j}\mu_{1,k})_D + \frac{2}{3}((\mu_{2,i})_E, (\mu_{2,j}\mu_{1,k})_E)_E = 0,\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist und die gewünschte Aussage zeigt. □

Proposition 5.12. *Ist* $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ *und* $j \in \{1, \ldots, 4\}$*, so existieren Vorzeichen* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ *und verschiedene Charaktere* $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathrm{Irr}(B)$ *mit*

$$\mu_{7,j} * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \epsilon_3\chi_3.$$

Hierbei haben χ_1*,* χ_2 *und* χ_3 *nicht Höhe* 0*. Durchläuft* χ *einen* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$*-Orbit, so ergeben sich so insgesamt zwölf verschiedene irreduzible Charaktere als Summanden (mit Vorzeichen). Diese zwölf Charaktere sind von der Wahl des* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$*-Orbits unabhängig.*

Beweis. Nach Lemma 5.5 ist $\mu_{7,j}$ $\mathcal{F}$-stabil und somit ist $\mu_{7,j} * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Das Skalarprodukt $(\mu_{7,j} * \chi, \mu_{7,j} * \chi)_G = 3$ haben wir im Beweis von Lemma 5.7 berechnet. Anwendung von Korollar 5.8 ergibt, dass $(\mu_{7,j})_E$ das Doppelte eines linearen Charakters von E ist. Die Gestalt von $\mu_{7,j}$ in Lemma 5.2 zeigt, dass diese linearen Charaktere für verschiedene i

verschieden sind. Mit nochmaliger Anwendung von Korollar 5.8 folgt dann $(\mu_{7,j} * \chi, \mu_{7,k} * \chi)_G = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, 4\}$ mit $j \neq k$.

Aus dieser Analyse ergibt sich, dass $\mu_{7,j} * \chi$ tatsächlich eine Summe von drei irreduziblen Charakteren von B (mit Vorzeichen) ist. Nach dem Beweis von Lemma 5.2 gehen die Charaktere $\mu_{7,1}, \dots, \mu_{7,4}$ durch Multiplikation mit Charakteren aus $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ ineinander über. Mit Lemma 1.83 folgt dann, dass die drei irreduziblen Summanden von $\mu_{7,j} * \chi$ für verschiedene j paarweise verschieden sind. So ergeben sich also insgesamt zwölf irreduzible Charaktere.

Wir zeigen, dass die irreduziblen Summanden nicht die Höhe 0 haben. Hierfür betrachten wir den Block b_{tu} mit Cartanmatrix

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl nach Lemma 5.2 und Proposition 3.17. Man zeigt leicht, dass tu die Ordnung 4 hat (vgl. den Beweis von Lemma 5.2). Für die $\mathcal{F}$-stabilen Charaktere $\mu_{7,j}$ gilt $\mu_{7,j}(tu) = \pm 2i \notin \mathbb{R}$. Deswegen ist tu nicht zu seinem Inversen $\mathcal{F}$-konjugiert. Für den rationalen Teil a_0^{tu} und den imaginären Teil a_1^{tu} von d^{tu} gilt nach Proposition 1.56 also

$$(a_0^{tu})^T a_0^{tu} = (a_1^{tu})^T a_1^{tu} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $m_{\chi\chi}^{tu} = \frac{3}{32}$ nach Lemma 5.7. Aus dem Gleichheitsfall von Lemma 1.67 folgt somit, dass $d^{tu}(\chi)$ entweder ein ganzzahliger Vektor oder ein $i = \zeta_4$-faches eines ganzzahligen Vektors ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass ersteres der Fall ist. Eine kurze Fallunterscheidung liefert, dass $d^{tu}(\chi)$ bis auf ein Vorzeichen die Form $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ oder $(0, 0, 1)$ hat.

Der $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charakter λ_0 aus dem Beweis von Proposition 5.10 hat die Eigenschaft $\lambda_0(tu) = 1$. Betrachtung der Zerlegung von $\lambda_0 * \chi$ in eine vorzeichenbehaftete Summe von drei irreduziblen Charakteren aus Proposition 5.10 zusammen mit der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ liefert nun leicht, dass die Einschränkung von d^{tu} auf die 16 Charaktere in $\mathrm{Irr}_0(B)$ bis auf Umordnung und Vorzeichen der Zeilen die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

hat.

Wir wählen nun $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ mit $d^{tu}(\chi) = (\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ für ein $\epsilon \in \{\pm 1\}$ und betrachten die obige Zerlegung von $\mu_{7,1} * \chi$. Wir wählen χ_1, χ_2, χ_3 und $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ entsprechend. Wegen $\mu_{7,1}(tu) = 2i$ gilt

$$(2i\epsilon, 2i\epsilon, 2i\epsilon) = \epsilon_1 d^{tu}(\chi_1) + \epsilon_2 d^{tu}(\chi_2) + \epsilon_3 d^{tu}(\chi_3).$$

Eine kurze Fallunterscheidung unter Beachtung der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ und der Gestalt von $(a_1^{tu})^T a_1^{tu}$ liefert, dass die Einschränkung von d^{tu} auf die konstruierten zwölf Charaktere bis auf Reihenfolge und Vorzeichen von Zeilen die Form

$$\begin{pmatrix} i & i & i & i & i & i & i & i & . & . & . & . \\ i & i & i & i & . & . & . & . & i & i & i & i \\ . & . & . & . & i & i & i & i & i & i & i & i \end{pmatrix}^T$$

hat. Nach Satz 1.65 haben die zwölf konstruierten Charaktere also nicht die Höhe 0. Aus der Gestalt der Zerlegungsmatrix ergibt sich auch die Unabhängigkeit dieser Charaktere von der $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn. $\square$

Wir werden später zeigen, dass die zwölf Charaktere aus der letzten Proposition tatsächlich die Höhe 1 haben. Im Folgenden konstruieren wir irreduzible Charaktere von Höhe 2. Hierfür benötigen wir allerdings einige Informationen über Beiträge der eben konstruierten Charaktere.

Lemma 5.13. *Ist ψ einer der zwölf Charaktere aus Proposition 5.12 und $v \in \{u, tu, r^2u, r^2tu\}$, so ist $m^v_{\psi\psi} = \frac{1}{8}$.*

Beweis. Der Block b_v hat nach Lemma 5.2, Proposition 3.17 und Bemerkung 1.68 (ii) die Cartanmatrix

$$C_{b_v} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, so ist $m^v_{\chi\chi} = \frac{3}{32}$ nach Lemma 5.7. Eine kurze Fallunterscheidung liefert, dass eine $|\langle v\rangle|$-te Einheitswurzel ζ existiert, sodass die Zerlegungszahlen $d^v(\chi)$ die Form (ζ, ζ, ζ), $(\zeta, 0, 0)$, $(0, \zeta, 0)$ oder $(0, 0, \zeta)$ haben. Für die Zerlegungszahlen d^v der 16 Charaktere von Höhe 0 aus Proposition 5.10 sind also vier Fälle möglich. Für verschiedene Charaktere kann hierbei die Einheitswurzel ζ unterschiedlich sein. Das wird für unsere Untersuchung allerdings keine Rolle spielen. Wir zeigen, dass jeder der obigen vier Fälle auftritt, indem wir jede andere Möglichkeit zum Widerspruch führen:

- Tritt genau einer der Fälle für alle 16 Charaktere ein, so ergibt sich offenbar ein Widerspruch zur Gestalt von C_{b_v}.
- Treten genau zwei der Fälle auf, so kann durch geeignete Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_v)$-Basis erreicht werden, dass diese Fälle gerade (ζ, ζ, ζ) und $(\zeta, 0, 0)$ sind. Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ und der Zerlegung von $\lambda_k * \chi$ für $k \in \{0, 4, 8, 12\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ in eine vorzeichenbehaftete Summe von drei irreduziblen Charakteren von Höhe 0 (vgl. den Beweis von Proposition 5.10) folgt, dass jeder der beiden Fälle genau für acht Charaktere auftritt. Ist nun $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig, so ist $\mu_{7,j} * \chi$ für $j \in \{1, \ldots, 4\}$ nach Proposition 5.12 eine Summe mit Vorzeichen von drei irreduziblen Charakteren mit Höhe größer 0. Wegen $\mu_{7,j}(v) \in \{\pm 2, \pm 2i\}$ verschwindet die erste Komponente von $d^v(\psi)$ für wenigstens einen dieser Charaktere ψ nicht. Das ist aber wiederum ein Widerspruch zur Gestalt von C_{b_v}.
- Nun nehmen wir an, dass genau drei der Fälle auftreten. Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ und der Zerlegung von $\lambda_k * \chi$ für $k \in \{0, 4, 8, 12\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ in eine vorzeichenbehaftete Summe von drei irreduziblen Charakteren von Höhe 0 (vgl. den Beweis von Proposition 5.10) ergibt sich dann ein Widerspruch, denn χ und die drei Summanden bilden ein Repräsentantensystem der $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von Charakteren von Höhe 0.

Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf $\mathrm{Irr}_0(B)$ folgt nun offenbar, dass jeder der vier Fälle für genau eine $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn von Charakteren von Höhe 0 eintritt. Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, so zerfällt $\mu_{7,1} * \chi$ nach Proposition 5.12 als vorzeichenbehaftete Summe von drei irreduziblen Charakteren ψ_1, ψ_2, ψ_3. Diese bilden ein Repräsentantensystem der $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von Charakteren aus Proposition 5.12. Da diese Konstruktion für jeden Charakter χ aus $\mathrm{Irr}_0(B)$ dieselben drei $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von Charakteren liefert, bilden die Vektoren $d^v(\psi_1), d^v(\psi_2), d^v(\psi_3)$ ein lineares Erzeugendensystem des $\mathbb{C}^3$, denn Vektoren der Form $(\zeta, 0, 0)$, $(0, \zeta, 0)$ und $(0, 0, \zeta)$ sind darstellbar. Die Vektoren $d^v(\psi_1), d^v(\psi_2), d^v(\psi_3)$ bilden also eine Basis und verschwinden deshalb insbesondere nicht. Nach Satz 1.65 und Lemma 1.67 ist der rationale Teil von $m^v_{\psi\psi}$ für jeden der zwölf Charaktere ψ aus Proposition 5.12 folglich mindestens $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Der rationale Teil der Summe $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m^v_{\chi\chi}$ ist folglich mindestens $\frac{3}{32} \cdot 16 + \frac{4}{32} \cdot 12 = 3$. Nach [62, Proposition 2.2] ist dies auch die tatsächliche Summe, d.h. der rationale Part von $m^v_{\psi\psi}$ ist genau $\frac{1}{8}$. Man zeigt leicht, dass dann eine $|\langle v\rangle|$-te Einheitswurzel ζ' existiert, sodass $d^v(\psi)$ das ζ'-fache eines ganzzahligen Vektors ist. Gegebenenfalls ist $m^v_{\psi\psi}$ insbesondere rational und die Behauptung folgt. □

Proposition 5.14. *Sind ψ_j mit $j \in \{1, 2, 3\}$ Repräsentanten der* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$*-Bahnen von Charakteren aus Proposition 5.12 und $i \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$, so sind $\mu_{2,i} * \psi_j$ irreduzible Charaktere von B. Diese haben mindestens Höhe* 2 *und sind für verschiedene Paare (i, j) voneinander verschieden.*

Beweis. Für $q \in \{1, r^2\}$ und $z \in \{1, \ldots, 2^{n-5} - 1\}$ sei $v := qt^z$. Nach Lemma 5.2, Proposition 3.17

und Bemerkung 1.68 (ii) hat b_v die Cartanmatrix

$$C_{b_v} = 2^{n-3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Ist χ ein Charakter in $\mathrm{Irr}_0(B)$, so ist $m^v_{\chi\chi} = \frac{3}{2^{n-1}}$ nach Lemma 5.7. Eine kurze Fallunterscheidung liefert, dass eine $|\langle v\rangle|$-te Einheitswurzel ζ existiert, sodass $d^v(\chi)$ die Form (ζ,ζ,ζ), $(\zeta,0,0)$, $(0,\zeta,0)$ oder $(0,0,\zeta)$ hat. Wir wollen zeigen, dass jeder dieser vier Fälle für genau einen $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Orbit von $\mathrm{Irr}_0(B)$ eintritt. Hierbei argumentieren wir analog zum Beweis von Lemma 5.13.

Wie oben gezeigt, verschwinden die Zerlegungszahlen $d^v(\chi)$ für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ nicht. Ist dann $i \in \{1,\ldots,2^{n-5}-1\}$ und $\zeta_+^{i,z} \neq 0$, so verschwindet d^v folglich auch auf den Charakteren $\psi_{\chi,i}$ aus Proposition 5.11 nicht. Nun unterscheiden wir nach der Anzahl der für $d^v(\chi)$ mit $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ auftretenden obigen Fälle:

- Wir nehmen zunächst an, dass einer der vier Fälle für alle 16 Charaktere aus Proposition 5.10 eintritt. Berücksichtigen wir nun nur den Teil der Zerlegungsmatrix d^v, der zu den Charakteren aus Proposition 5.10 und Proposition 5.11 gehört, so erhalten wir wegen

$$16 + 4\sum_{i=1}^{2^{n-5}-1} |\zeta_+^{i,z}|^2 = 16 + 4(2^{n-4}-4) = 2^{n-2}$$

  (vgl. den Beweis von Lemma 5.2) bereits einen Widerspruch zur Gestalt von C_{b_v}. Dieser Fall tritt also nicht ein.

- Nun gehen wir davon aus, dass genau zwei der Fälle für $d^v(\chi)$ eintreten. Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ und aus der Zerlegung von $\lambda_k * \chi$ für $k \in \{0,4,8,12\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ in eine vorzeichenbehaftete Summe von drei irreduziblen Charakteren von Höhe 0 (vgl. den Beweis von Proposition 5.10) ergibt sich, dass jeder dieser beiden Fälle genau für 8 Charaktere auftritt. Wir erhalten einen Widerspruch wie im Beweis von Lemma 5.13, wenn man wie im letzten Fall die Zerlegungszahlen d^v auf den Charakteren aus Proposition 5.10 und Proposition 5.11 berücksichtigt.

- Treten genau drei der Fälle ein, so liefert die Zerlegung von $\lambda_k * \chi$ für $k \in \{0,4,8,12\}$ in irreduzible Summanden wie im Beweis von Proposition 5.10 sofort einen Widerspruch.

Wie gewünscht treten für die $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von $\mathrm{Irr}_0(B)$ also alle vier obigen Fälle auf. Nun wenden wir die Konstruktion der zwölf Charaktere aus Proposition 5.12 auf jede dieser Bahnen an. Da die erhaltenen Charaktere unabhängig von der Wahl der Bahn sind, ergibt sich mit $\mu_{7,j}(v) \in \{\pm 2, \pm 2i\}$ für $j \in \{1,\ldots,4\}$, dass man mit $d^v(\psi_1)$, $d^v(\psi_2)$ und $d^v(\psi_3)$ die Vektoren $(2\zeta,0,0)$, $(0,2\zeta',0)$ und $(0,0,2\zeta'')$ linear kombinieren kann, wobei ζ, ζ' und ζ'' jeweils $|\langle v\rangle|$-te Einheitswurzeln sind. Die Vektoren $d^v(\psi_1)$, $d^v(\psi_2)$ und $d^v(\psi_3)$ bilden also eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}^3$. Insbesondere verschwinden sie nicht.

Es seien nun $i \in \{1,\ldots,2^{n-5}-1\}$ und $j \in \{1,2,3\}$ beliebig gegeben. Der Charakter $\mu_{2,i}$ ist nach Lemma 5.5 $\mathcal{F}$-stabil. Folglich ist $\mu_{2,i} * \psi_j$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Wir bezeichnen mit i_2 die maximale Potenz von 2, die in i aufgeht. Dann ist $\zeta_+^{i,2^{n-6}/i_2} = 0$. Mit Lemma 5.2, Lemma 5.13 und der obigen Analyse folgt also, dass die Summe der $m^w_{\psi_j\psi_j}$ über die B-Elemente $(w,b_w) \in \mathcal{R}$ mit $\mu_{2,i}(w) = 0$ größer als $\frac{1}{2}$ ist. Für die übrigen B-Elemente $(w,b_w) \in \mathcal{R}$ ist $|\mu_{2,i}(w)| \leq 2$. Mit Satz 1.64 folgt somit

$$(\mu_{2,i} * \psi_j, \mu_{2,i} * \psi_j)_G < 2.$$

Da dieses Skalarprodukt ganzzahlig ist und sicher nicht verschwindet, folgt $(\mu_{2,i} * \psi_j, \mu_{2,i} * \psi_j)_G = 1$, d.h. es gibt ein Vorzeichen, sodass $\pm\mu_{2,i} * \psi_j$ ein irreduzibler Charakter von B ist. Wegen $\mu_{2,i}(1) = 2$ ist dieses Vorzeichen positiv. Da nach Proposition 5.12 $h(\psi_j) \geq 1$ ist, folgt hieraus auch $h(\mu_{2,i} * \psi_j) \geq 2$.

Es verbleibt zu zeigen, dass die konstruierten Charaktere für verschiedene Paare (i, j) voneinander verschieden sind. Seien hierfür $i, i' \in \{1, \dots, 2^{n-5} - 1\}$ und $j, j' \in \{1, 2, 3\}$ mit $(i, j) \neq (i', j')$ beliebig gegeben. Zunächst gehen wir von $n \neq 6$ aus. Ist weiter $i \neq i'$, so ergibt sich leicht, dass $\mu_{2,i}(t)$ und $\mu_{2,i'}(t)$ nicht identisch sind. Da $m^t_{\psi_j \psi_j}$ nach obiger Analyse nicht verschwindet, folgt für $j = j'$ unmittelbar $\mu_{2,i} * \psi_j \neq \mu_{2,i'} * \psi_{j'}$. Für $j \neq j'$ folgt dies auch, da $d^t(\psi_j)$ und $d^t(\psi_{j'})$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind. Ist schließlich $i = i'$, so existiert ein $z \in \{1, \dots, 2^{n-5} - 1\}$, sodass $\mu_{2,i}(t^z) \neq 0$ ist. Da $d^{t^z}(\psi_j)$ und $d^{t^z}(\psi_{j'})$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig sind, folgt $\mu_{2,i} * \psi_j \neq \mu_{2,i'} * \psi_{j'}$ auch in diesem Fall.

Sei nun schließlich $n = 6$. Dann ist offenbar $i = i' = 1$. Um $\mu_{2,i} * \psi_j \neq \mu_{2,i'} * \psi_{j'}$ auch hier zu zeigen, genügt es also, für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$

$$(\mu_{2,1} * (\mu_{7,1} * \chi), \mu_{2,1} * (\mu_{7,1} * \chi))_G = 3$$

zu zeigen. Unter Verwendung von Lemma 5.7 ergibt sich diese Identität unmittelbar. Hierbei ist $\mu_{2,1} \cdot \mu_{7,1} = \mu_{6,1}$ $\mathcal{F}$-stabil, denn die Charaktere $\mu_{2,1}$ und $\mu_{7,1}$ sind nach Lemma 5.5 $\mathcal{F}$-stabil. Bei der Berechnung ist $\zeta_-^{1,1} = 0$ in Lemma 5.2 zu beachten. Das beendet den Beweis. □

Nun können wir unsere Ergebnisse zusammenfassen und zeigen, dass wir alle irreduziblen Charaktere von B konstruiert haben.

Satz 5.15. *Es ist* $k(B) = 7 \cdot 2^{n-5} + 21$*,* $l(B) = 3$*,* $k_0(B) = 16$*,* $k_1(B) = 2^{n-3} + 8$ *und* $k_2(B) = 3 \cdot 2^{n-5} - 3$*.*

Beweis. Wir haben bisher die folgenden irreduziblen Charaktere konstruiert:

(i) 16 Charaktere von Höhe 0 in Proposition 5.10,

(ii) $4 \cdot (2^{n-5} - 1) = 2^{n-3} - 4$ Charaktere der Höhe 1 in Proposition 5.11,

(iii) Zwölf Charaktere von Höhe größer 0 in Proposition 5.12,

(iv) $3 \cdot (2^{n-5} - 1) = 3 \cdot 2^{n-5} - 3$ Charaktere von Höhe größer 1 in Proposition 5.14.

Offenbar ist die Familie von Charakteren in (i) hierbei zu allen übrigen Familien disjunkt. Offensichtlich sind auch die Familien (ii) und (iv) disjunkt. Die Familien (ii) und (iii) sind ebenfalls disjunkt, denn nach Lemma 5.13 verschwinden die Zerlegungszahlen d^u auf den zwölf Charakteren aus (iii) nicht. Wegen $\mu_{2,i}(u) = 0$ für $i \in \{1, \dots, 2^{n-5} - 1\}$ gilt dies allerdings nicht für die Charaktere aus Proposition 5.11. Mit derselben Argumentation sind auch die Familien (iii) und (iv) disjunkt.

So erhalten wir also insgesamt $7 \cdot 2^{n-5} + 21$ verschiedene irreduzible Charaktere von B. Um zu zeigen, dass dies alle sind, schätzen wir die Summe über alle $m^{r^2}_{\chi\chi}$ für diese Charaktere χ ab. Für Charaktere χ in der Familie (i) ist $m^{r^2}_{\chi\chi} = \frac{3}{2^n}$ nach Lemma 5.7. Ist χ aus Familie (ii), so folgt nach Konstruktion $m^{r^2}_{\chi\chi} = \frac{12}{2^n}$, denn $\mu_{2,i}(r^2) = 2$ für $i \in \{1, \dots, 2^{n-5} - 1\}$. Da die Charaktere χ in Familie (iii) wenigstens die Höhe 1 haben, ergibt Anwendung von Satz 1.64 $m^{r^2}_{\chi\chi} \geq \frac{4}{2^n}$. Gleichheit tritt hierbei nur ein, wenn die Charaktere tatsächlich die Höhe 1 haben. Für die Charaktere χ aus Familie (iv) ergibt sich schließlich $m^{r^2}_{\chi\chi} \geq \frac{16}{2^n}$ analog zur Situation in (ii). Gleichheit tritt hierbei nur ein, wenn diese Charaktere die Höhe 2 haben. Summieren wir über diese minimalen Beiträge, so erhalten wir die Summe

$$16 \cdot \frac{3}{2^n} + (2^{n-3} - 4) \cdot \frac{12}{2^n} + 12 \cdot \frac{4}{2^n} + (3 \cdot 2^{n-5} - 3) \cdot \frac{16}{2^n} = 3.$$

Die entsprechende Summe über alle irreduziblen Charaktere ist nach [62, Proposition 2.2] ebenfalls gleich 3. Wegen $r^2 \in Z(D)$ haben wir also alle irreduziblen Charaktere in B gefunden. Zudem tritt oben in den Familien (iii) und (iv) jeweils der Gleichheitsfall ein. Hieraus ergeben sich die Werte für $k(B)$ und alle $k_i(B)$ mit $i \in \mathbb{N}_0$. Aus Lemma 5.9 folgt schließlich $l(B) = 3$. □

Aus Satz 5.15 ergibt sich auch leicht, dass alle Vermutungen aus Abschnitt 2 für den Block B erfüllt sind. Alperins Gewichtsvermutung folgt hierbei mit [39, Proposition 5.4], Satz 1.89 und $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(D) \cong C_3$, da D die einzige $\mathcal{F}$-zentrische und $\mathcal{F}$-radikale Untergruppe ist.

5.2 Defektgruppen Suz

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir Blöcke B von G mit einer Defektgruppe $D := \mathrm{Suz}$, welche eine 2-Sylowgruppe von $\mathrm{PSU}(3,4)$ ist. In [21, Theorem 5.3] wurde gezeigt, dass D resistent ist und dass genau vier verschiedene saturierte Fusionssysteme auf D existieren, welche sich in ihrem Trägheitsindex unterscheiden. Wir beschränken uns auf den Fall des Trägheitsindex 3. Im Folgenden liege also stets das Fusionssystem $\mathcal{F} := \mathcal{F}_D(B) = \mathcal{F}_D(D \rtimes C_3)$ vor. Wir verweisen auch auf die Diplomarbeit [6], in der bereits eine Untersuchung von Blöcken mit Defektgruppe D unter massivem Einsatz von Computeralgebra stattfand.

Wir geben einige Informationen über die Struktur von D, welche sich leicht per Hand oder mit GAP verifizieren lassen: Die Gruppe D enthält genau 15 Konjugationsklassen von nichtzentralen Elementen. Durch Konjugation in $\mathcal{F}$ werden diese zu genau fünf $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen fusioniert. Repräsentanten dieser Konjugationsklassen bezeichnen wir mit $x_1, \ldots, x_5$. Es ist $Z(D) \cong C_2 \times C_2$. Die drei Konjugationsklassen von nichttrivialen zentralen Elementen werden zu einer $\mathcal{F}$-Konjugationsklasse fusioniert. Mit z bezeichnen wir ein beliebiges dieser Elemente. Die B-Elemente (u, b_u) mit $u \in \{1, z, x_1, \ldots, x_5\}$ bilden nun nach Lemma 1.49 ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Für jedes $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ hat hierbei b_u die Defektgruppe $C_D(u)$. Da jedes Elemente u für $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ durch $\mathcal{F}$ zu Elementen anderer D-Konjugationsklassen konjugiert ist, hat b_u stets Trägheitsindex 1 und ist deshalb nilpotent. Wegen $|C_D(x_i)| = 16$ für $i \in \{1, \ldots, 5\}$ hat der Block b_{x_i} eine Defektgruppe der Ordnung 16. Da die x_i die Ordnung 4 haben und zu ihrem Inversen konjugiert sind, hat die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von B nach Proposition 1.57 ausschließlich ganzzahlige Einträge.

Lemma 5.16. *Es ist $k(B) - l(B) = 6$.*

Beweis. Da die b_u für $(u, b_u) \in \mathcal{R} \setminus \{(1, B)\}$ nilpotent sind, ist stets $l(b_u) = 1$. Anwendung von Satz 1.50 liefert nun $k(B) - l(B) = 6$. □

Zur Analyse der verallgemeinerten Zerlegungszahlen wollen wir die $*$-Konstruktion benutzen. Hierfür müssen wir zunächst einige $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere von D finden.

Lemma 5.17. *Für jedes $i \in \{1, \ldots, 5\}$ existiert ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter λ_i von D mit*

$$\lambda_i(u) = \begin{cases} 3 & \textit{falls } u = x_i, \\ -1 & \textit{falls } u = x_j \textit{ mit } j \in \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i\}, \\ 3 & \textit{falls } u \in Z(D). \end{cases}$$

Beweis. Etwa mit GAP können wir die Charaktertafel von D berechnen. Die Trägheitsgruppe von B operiert auf den irreduziblen Charakteren von D. Da $\mathcal{F}$ kontrolliert ist, erhalten wir einen $\mathcal{F}$-stabilen verallgemeinerten Charakter von D, wenn wir über die Charaktere in einer Bahn dieser Operation summieren. Führen wir diese Konstruktion mit den 15 nichttrivialen linearen Charakteren von D durch, so ergeben sich gerade die λ_i. □

Die Bezeichnung λ_i für diese Charaktere werden wir von nun an ohne weitere Referenz verwenden. Wir wollen im Folgenden die $*$-Konstruktion mit diesen Charakteren nutzen, um die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von B zu ermitteln. Hierfür zeigen wir zunächst ein Resultat über Beiträge $m^1_{\chi\chi}$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, welches die besondere Gestalt der Elementarteiler der Cartanmatrix von B ausnutzt.

Lemma 5.18. *Die Cartanmatrix C von B hat gerade die Elementarteiler* 64 *und (möglicherweise mehrfach)* 1.

Beweis. Da Blöcke zu allen nichttrivialen B-Elementen nilpotent sind, folgt das aus [30, Corollary 1]. □

Lemma 5.19. *Es sei $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$. Für den Beitrag $m^1_{\chi\chi}$ zum Skalarprodukt $(\chi,\chi)_G$ gilt dann:*

(i) Ist $h(\chi) = 0$, so ist $64m^1_{\chi\chi} \in \{3, 11, 19, 35, 43\}$.

(ii) Ist $h(\chi) > 0$, so ist $64m^1_{\chi\chi} \in \{12, 44, 48\}$.

Beweis. Zunächst sei $\chi \in \operatorname{Irr}_0(B)$. Nach Satz 1.63 ist die Summe über die Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ aller B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ gerade 1. Nach Satz 1.65 ist für jedes B-Element $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ zudem $|C_D(u)|m^u_{\chi\chi}$ ungerade. Eine kurze Fallunterscheidung liefert, dass die Summe $\sum_{i=1}^{5} m^{x_i}_{\chi\chi}$ entweder $\frac{5}{16}$ oder $\frac{13}{16}$ ist. Der Beitrag $m^z_{\chi\chi}$ ist $\frac{1}{64}$, $\frac{9}{64}$ oder $\frac{25}{64}$. Hierfür haben wir jeweils verwendet, dass die Blöcke zu nichttrivialen B-Elementen nilpotent sind. Prinzipiell gibt es für den verbleibenden Beitrag $m^1_{\chi\chi}$ also die Möglichkeiten $\frac{43}{64}$, $\frac{35}{64}$, $\frac{19}{64}$, $\frac{11}{64}$ oder $\frac{3}{64}$. Die Aussage (i) folgt.

Für (ii) betrachten wir die Matrix $M := 64C_B^{-1}$. Nach Lemma 5.18 hat M die Elementarteiler 1 und (eventuell mehrfach) 64. Es existieren also Matrizen $S, T \in \operatorname{GL}(l(B), \mathbb{Z})$ mit

$$M = S \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 64 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 64 \end{pmatrix} T \qquad \text{bzw.} \qquad S^{-1}M(S^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 64 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 64 \end{pmatrix} T(S^{-1})^T.$$

Die Matrix $S^{-1}M(S^{-1})^T$ ist hierbei symmetrisch und ganzzahlig. Auch die Matrix $T(S^{-1})^T$ ist ganzzahlig. Es existieren folglich eine Matrix $M' \in \mathbb{Z}^{(l(B)-1)\times(l(B)-1)}$, ein Spaltenvektor $v \in \mathbb{Z}^{l(B)-1}$ und ein $e \in \mathbb{Z}$ mit

$$S^{-1}M(S^{-1})^T = \begin{pmatrix} e & 64v^T \\ 64v & 64M' \end{pmatrix}.$$

Der Beitrag $m^1_{\chi\chi}$ eines Charakters $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ ergibt sich nun für $w := d^1(\chi)$ zu

$$m^1_{\chi\chi} = \frac{1}{64} wMw^T = \frac{1}{64}(wS)S^{-1}M(S^{-1})^T(wS)^T.$$

Es ist also $64m^1_{\chi\chi} \equiv er^2_\chi \pmod{64}$ für ein $r_\chi \in \mathbb{Z}$. Wegen $0 < 64m^1_{\chi\chi} < 64$ genügt es nun also, die möglichen Reste von er^2_χ modulo 64 zu berechnen. Bekanntlich existieren in B irreduzible Charaktere von Höhe 0. Es sei $\psi \in \operatorname{Irr}_0(B)$ ein beliebiger solcher Charakter. Wir haben die möglichen Werte für $m := 64m^1_{\psi\psi}$ oben berechnet. Ist r_ψ entsprechend gewählt, so gilt dann $m \equiv er^2_\psi \pmod{64}$. Da m ungerade und somit invertierbar modulo 64 ist, ist dies auch r_ψ. Sei also $r' \in \mathbb{Z}$ mit $r'r_\psi \equiv 1 \pmod{64}$ gegeben. Dann ist $e \equiv mr'^2 \pmod{64}$. Für $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ gilt somit

$$64m^1_{\chi\chi} \equiv er^2_\chi \equiv mr'^2 r^2_\chi \equiv m(r'r_\chi)^2 \pmod{64}.$$

Durchläuft r_χ hierbei alle Restklassen modulo 64, so tut dies auch $r'r_\chi$. Damit können wir nun alle Möglichkeiten für $64m^1_{\chi\chi}$ berechnen. Die so erhaltene Liste hängt hierbei nicht davon ab, welcher Wert m aus (i) tatsächlich eintritt, denn die Werte in (i) gehen durch Multiplikation mit ungeraden quadratischen Resten modulo 64 ineinander über. Die erhaltenen geraden Werte sind nach Satz 1.65 die möglichen Werte für Charaktere von Höhe größer 0. □

Nach dieser Vorbereitung können wir einige Eigenschaften der verallgemeinerten Zerlegungsmatrizen d^{x_i} für $i \in \{1, \ldots, 5\}$ zeigen.

Lemma 5.20. *Ist $i \in \{1, \ldots, 5\}$ und $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$, so ist $d^{x_i}(\chi) \in \{0, \pm 1, \pm 3\}$*

Beweis. Sicher enthält die Zerlegungsmatrix d^{x_i} ausschließlich ganzzahlige Einträge. Der Block b_{x_i} hat Defekt 4. Er ist nilpotent und es gilt $m_{\chi\chi}^{x_i} < 1$. Wir müssen also nur den Fall $d^{x_i}(\chi) = \pm 2$ ausschließen. Wir gehen vom Gegenteil aus. Nach Satz 1.65 hat χ dann sicher nicht Höhe 0. Hieraus folgt auch, dass $d^{x_j}(\chi)$ für alle $j \in \{1, \ldots, 5\}$ entweder 0 oder ± 2 ist. Ist $t > 0$ die Anzahl der j, für die der zweite Fall eintritt, so ist die Summe $\sum_{j=1}^{5} m_{\chi\chi}^{x_j}$ gerade $\frac{t}{4}$. Wegen $z \in Z(D)$ verschwindet $m_{\chi\chi}^{z}$ nicht. Unter erneuter Beachtung von Satz 1.63 und Satz 1.65 können wir nun alle Möglichkeiten für die Summe $m_{\chi\chi}^{z} + \sum_{j=1}^{5} m_{\chi\chi}^{x_j}$ berechnen und mit Lemma 5.19 abgleichen. Es ergeben sich die Fälle:

(i) $t = 1$, $d^z(\chi) = \pm 2$ und $m_{\chi\chi}^{1} = \frac{44}{64}$,

(ii) $t = 1$, $d^z(\chi) = \pm 6$ und $m_{\chi\chi}^{1} = \frac{12}{64}$,

(iii) $t = 3$, $d^z(\chi) = \pm 2$ und $m_{\chi\chi}^{1} = \frac{12}{64}$.

Es sei ein $j \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $i \neq j$ gegeben. Nach Lemma 5.17 ist λ_j ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter von D. Folglich ist auch $\mu := \lambda_j - 2 \cdot 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}$ ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter von D und $\mu * \chi$ ist ein verallgemeinerter Charakter von B. In den Fällen (i) und (ii) ist $d^{x_j}(\chi) = 0$ und man berechnet

$$(\mu * \chi, \mu * \chi)_G = \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 3.$$

Weiter ist

$$(\mu * \chi, \chi)_G = \frac{1}{4} \cdot (-3) + \frac{3}{4} \cdot 1 = 0.$$

Folglich ist $\mu * \chi$ eine vorzeichenbehaftete Summe von genau drei irreduziblen Charakteren von B, wobei χ keiner dieser Summanden ist. Es existieren also Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathrm{Irr}(B) \setminus \{\chi\}$ mit

$$\mu * \chi = \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_2 \chi_2 + \epsilon_3 \chi_3.$$

Betrachten wir Zerlegungszahlen zum B-Element (x_i, b_{x_i}), so existiert wegen $\mu(x_i) = -3$ und $d^{x_i}(\chi) = \pm 2$ ein weiteres Vorzeichen ϵ mit

$$6\epsilon = \epsilon_1 d^{x_i}(\chi_1) + \epsilon_2 d^{x_i}(\chi_2) + \epsilon_3 d^{x_i}(\chi_3).$$

Mit $(d^{x_i}, d^{x_i}) = 16$ liefert eine kurze Fallunterscheidung, dass $d^{x_i}(\chi_k) = 2\epsilon\epsilon_k$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ ist. Nach Satz 1.65 gilt dann aber $k_0(B) = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Im Fall (iii) sei wieder $j \in \{1, \ldots, 5\}$ so gewählt, dass $d^{x_j}(\chi) = 0$ ist. Dann ist $\mu := \lambda_i - \lambda_j - 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}$ nach Lemma 5.17 ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter von D mit

$$\mu(u) = \begin{cases} 3 & \text{falls } u = x_i, \\ -5 & \text{falls } u = x_j, \\ -1 & \text{falls } u = x_k \text{ mit } k \in \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i, j\}, \\ -1 & \text{falls } u \in Z(D). \end{cases}$$

Somit ist $\mu * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B und man berechnet

$$(\mu * \chi, \mu * \chi)_G = \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{2}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 3.$$

Weiter ergibt sich

$$(\mu * \chi, \chi)_G = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{2}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = 0.$$

Der verallgemeinerter Charakter $\mu * \chi$ ist also eine Summe mit Vorzeichen von drei verschiedenen irreduziblen Charakteren von B und χ ist keiner dieser Summanden. Wegen $\mu(x_i) = 3$ ergibt sich nun ein Widerspruch wie in den Fällen (i) und (ii). Wir haben also stets einen Widerspruch erhalten. Die Annahme ist folglich falsch und die Behauptung ist richtig. □

Proposition 5.21. *Ist $i \in \{1, \ldots, 5\}$, so enthält d^{x_i} genau die nichtverschwindenden Einträge ± 3 und siebenmal ± 1. Insbesondere ist $k_0(B) = 8$ und der Block B erfüllt die Vermutungen von Olsson und Alperin-McKay. Die Einträge $d^{x_i}(\chi) = \pm 3$ treten für verschiedene i für verschiedene Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ auf. Ist $j \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $i \neq j$ und ist $d^{x_i}(\chi_1) = 3\gamma_1$ und $d^{x_j}(\chi_2) = 3\gamma_2$ für Vorzeichen γ_1, γ_2 und $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(B)$, so ist $\gamma_1 d^{x_j}(\chi_1) = \gamma_2 d^{x_i}(\chi_2)$.*

Beweis. Aus $(d^{x_1}, d^{x_1}) = 16$, Satz 1.65 und Lemma 5.20 folgt zunächst $k_0(B) \in \{8, 16\}$. Zur weiteren Untersuchung betrachten wir für $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $i \neq j$ den nach Lemma 5.17 $\mathcal{F}$-stabilen Charakter $\mu := \lambda_i - \lambda_j$ mit

$$\mu(u) = \begin{cases} 4 & \text{fall } u = x_i, \\ -4 & \text{falls } u = x_j, \\ 0 & \text{falls } u = x_k \text{ mit } k \in \{1, \ldots, 5\} \setminus \{i, j\}, \\ 0 & \text{falls } u \in Z(D). \end{cases}$$

Für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ ist $\mu * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Wählen wir speziell $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ mit $d^{x_i}(\chi) \neq \pm 3$ und $d^{x_j}(\chi) \neq \pm 3$, so folgt mit Satz 1.65 $d^{x_i}(\chi) = \delta_1$ und $d^{x_j}(\chi) = \delta_2$ für Vorzeichen $\delta_1, \delta_2 \in \{\pm 1\}$. Ein solches χ existiert wegen $(d^{x_i}, d^{x_i}) = (d^{x_j}, d^{x_j}) = 16$ und $k_0(B) > 2$ offenbar. Nun berechnen wir

$$(\mu * \chi, \mu * \chi)_G = \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{16} \cdot 16 = 2$$

und

$$(\mu * \chi, \chi)_G = \frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot (-4) = 0.$$

Es existieren also Vorzeichen ϵ_1, ϵ_2 und verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(B) \setminus \{\chi\}$ mit

$$\mu * \chi = \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_2 \chi_2.$$

Wegen $\mu(x_i) = 4$, $d^{x_i}(\chi) = \delta_1$ und Lemma 5.20 ist $d^{x_i}(\chi_1) = 3\delta_1\epsilon_1$ oder $d^{x_i}(\chi_2) = 3\delta_1\epsilon_2$. Das zeigt die Aussage über die nichtverschwindenden Zerlegungszahlen in d^{x_i}. Mit Satz 1.65 folgen auch $k_0(B) = 8$ und die Vermutungen von Olsson und Alperin-McKay.

Für die letzten beiden Behauptungen gehen wir in obiger Situation ohne Einschränkung von $d^{x_i}(\chi_1) = 3\delta_1\epsilon_1$ aus. Wäre dann $d^{x_j}(\chi_1) = \pm 3$, so ergäbe sich ein Widerspruch mit Satz 1.63. Weiter ist $d^{x_i}(\chi_2) = \delta_1\epsilon_2$. Mit $\mu(x_j) = -4$ folgen analog $d^{x_j}(\chi_1) = -\delta_2\epsilon_1$ und $d^{x_j}(\chi_2) = -3\delta_2\epsilon_2$. Setzen wir $\gamma_1 = \delta_1\epsilon_1$ und $\gamma_2 = -\delta_2\epsilon_2$, so ergibt sich nun die letzte Behauptung. □

Proposition 5.21 erlaubt uns nun die Berechnung der Blockinvarianten.

Satz 5.22. *Es tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) Es ist $k(B) = 9$, $l(B) = 3$, $k_0(B) = 8$ und $k_2(B) = 1$. Es existieren eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ und $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-Basen zu den übrigen B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$, sodass die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von B die Form

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc}
d^{x_1} & 3\epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 & . \\
d^{x_2} & \epsilon_1 & 3\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_3} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 3\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_4} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & 3\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_5} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & 3\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{z} & 3\epsilon_1 & -3\epsilon_2 & -3\epsilon_3 & -3\epsilon_4 & -3\epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 & 4\delta_1 \\
d^{1}_{\varphi_1} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & . & . & \epsilon_8 & -4\delta_1 \\
d^{1}_{\varphi_2} & . & . & . & . & . & -\epsilon_6 & . & \epsilon_8 & . \\
d^{1}_{\varphi_3} & . & . & . & . & . & . & -\epsilon_7 & \epsilon_8 & .
\end{array}\right)^T$$

oder

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc}
d^{x_1} & 3\epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 & . \\
d^{x_2} & \epsilon_1 & 3\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_3} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 3\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_4} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & 3\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{x_5} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & 3\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . \\
d^{z} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -5\epsilon_6 & 3\epsilon_7 & 3\epsilon_8 & 4\delta_1 \\
d^1_{\varphi_1} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & \epsilon_6 & . & . & . \\
d^1_{\varphi_2} & . & . & . & . & . & \epsilon_6 & -\epsilon_7 & . & 2\delta_1 \\
d^1_{\varphi_3} & . & . & . & . & . & . & -\epsilon_7 & \epsilon_8 & .
\end{array}\right)^T$$

für Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_8, \delta_1$ hat. Die Cartanmatrix von B relativ zu derselben $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis ist

$$\begin{pmatrix} 22 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 1 & . \\ 1 & 6 & 1 \\ . & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es ist $k(B) = 11$, $l(B) = 5$, $k_0(B) = 8$ und $k_2(B) = 3$. Es existieren eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$ und $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_u)$-Basen zu den übrigen B-Elementen $(u, b_u) \in \mathcal{R}$, sodass die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von B die Form

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccccc}
d^{x_1} & 3\epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 & . & . & . \\
d^{x_2} & \epsilon_1 & 3\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . & . & . \\
d^{x_3} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 3\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . & . & . \\
d^{x_4} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & 3\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . & . & . \\
d^{x_5} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & 3\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & . & . & . \\
d^{z} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & 3\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & 4\delta_1 & 4\delta_2 & 4\delta_3 \\
d^1_{\varphi_1} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & . & \epsilon_7 & . & -\delta_1 & . & . \\
d^1_{\varphi_2} & . & . & . & . & . & -\epsilon_6 & \epsilon_7 & . & \delta_1 & . & . \\
d^1_{\varphi_3} & . & . & . & . & . & . & \epsilon_7 & -\epsilon_8 & . & . & . \\
d^1_{\varphi_4} & . & . & . & . & . & . & . & . & -\delta_1 & \delta_2 & . \\
d^1_{\varphi_5} & . & . & . & . & . & . & . & . & -\delta_1 & . & \delta_3
\end{array}\right)^T$$

für Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_8, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ hat. Die Cartanmatrix von B relativ zu derselben $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis ist

$$\begin{pmatrix} 7 & . & 1 & 1 & 1 \\ . & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & . & . \\ 1 & -1 & . & 2 & 1 \\ 1 & -1 & . & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir ermitteln die Struktur der Zerlegungszahlen d^{x_i} für $i \in \{1, \ldots, 5\}$ und nutzen dafür Proposition 5.21. Für $i \in \{1, \ldots, 5\}$ seien $\chi_i \in \mathrm{Irr}_0(B)$ die Charaktere mit $d^{x_i}(\chi_i) = \pm 3$. Die übrigen irreduziblen Charaktere von Höhe 0 seien χ_6, χ_7, χ_8. Wir wählen Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_8$ mit $d^{x_1}(\chi_1) = 3\epsilon_1$ und $d^{x_1}(\chi_i) = \epsilon_i$ für $i \in \{2, \ldots, 8\}$. Für die Blöcke b_{x_i} mit $i \in \{2, \ldots, 5\}$ wählen wir $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x_i})$-Basen, sodass $d^{x_i}(\chi_i) = 3\epsilon_i$ bezüglich dieser Basen ist. Anwendung von Proposition 5.21 und von Orthogonalitätsrelationen liefert dann für $\chi_1, \ldots, \chi_8$ die Zerlegungszahlen

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc}
d^{x_1} & 3\epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 \\
d^{x_2} & \epsilon_1 & 3\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 \\
d^{x_3} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 3\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 \\
d^{x_4} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & 3\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 \\
d^{x_5} & \epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & 3\epsilon_5 & -\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8
\end{array}\right)^T.$$

Die Charaktere von Höhe größer 0 seien $\psi_1, \ldots, \psi_t$ für ein $t \geq 0$. Die Zerlegungszahlen d^{x_i} mit $i \in \{1, \ldots, 5\}$ verschwinden für diese Charaktere. Die Zerlegungszahlen $d^z(\psi_j)$ sind für $j \in \{1, \ldots, t\}$

gerade $4\delta_j$ für ein Vorzeichen δ_j, wie sich aus Satz 1.63 und Lemma 5.19 ergibt. Wir wollen die übrigen Einträge von d^z berechnen. Aus den Orthogonalitätsrelationen zu $d^{x_1}, \ldots, d^{x_5}$ ergibt sich leicht

$$\epsilon_1 d^z(\chi_1) = -\epsilon_2 d^z(\chi_2) = -\epsilon_3 d^z(\chi_3) = -\epsilon_4 d^z(\chi_4) = -\epsilon_5 d^z(\chi_5) = \epsilon_6 d^z(\chi_6) + \epsilon_7 d^z(\chi_7) + \epsilon_8 d^z(\chi_8).$$

Durch eine kurze Fallunterscheidung nach den Werten von $d^z(\chi_1)$ und t erhalten wir nun nach geeigneter Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_z)$-Basis und einer eventuellen Umsortierung der Charaktere χ_6, χ_7 und χ_8 gerade die folgenden Möglichkeiten für d^z an den Stellen $\chi_1, \ldots, \chi_8, \psi_1, \ldots, \psi_t$, wobei wir $(d^z, d^z) = 64$ und Satz 1.65 beachten:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & 3\epsilon_6 & -\epsilon_7 & -\epsilon_8 & 4\delta_1 & 4\delta_2 & 4\delta_3\end{pmatrix}^T,\\
&\begin{pmatrix}\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & -\epsilon_4 & -\epsilon_5 & -5\epsilon_6 & 3\epsilon_7 & 3\epsilon_8 & 4\delta_1\end{pmatrix}^T,\\
&\begin{pmatrix}3\epsilon_1 & -3\epsilon_2 & -3\epsilon_3 & -3\epsilon_4 & -3\epsilon_5 & \epsilon_6 & \epsilon_7 & \epsilon_8 & 4\delta_1\end{pmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Nun können wir für jeden dieser Fälle eine $\mathbb{Z}$-Basis des orthogonalen Komplements der bisherigen Spalten berechnen. So erhalten wir Zerlegungsmatrizen in den obigen Fällen. Hieraus ergeben sich auch die Cartanmatrizen. Beispielsweise aus der Beitragsmatrix zum B-Element (z, b_z) berechnen wir die Höhen der Charaktere. □

Bemerkung 5.23. *(i) Die obigen Fälle sind exakt die in [6, Abschnitt 4.5]. Allerdings haben wir die Anzahl der Möglichkeiten für die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix von* 48 *auf* 3 *(vgl. [6, Abschnitt A.9]) reduziert.*

(ii) Aus Satz 5.22 ergibt sich, dass die Vermutungen aus Abschnitt 2 mit Ausnahme von Alperins Gewichtsvermutung für den Block B erfüllt sind. Da B kontrolliert ist, ist D die einzige $\mathcal{F}$-zentrische und $\mathcal{F}$-radikale Untergruppe von D. Es ist $I(B) \cong C_3$ und mit Satz 1.89 folgt $H^2(C_3, \mathbb{F}^\times) = 1$. Nach [39, Proposition 5.4] würde Alperins Gewichtsvermutung folglich $l(B) = 3$ implizieren. Es ist also zu erwarten, dass Fall (ii) in Satz 5.22 nicht eintreten kann.

(iii) Mit unserer Methode ist es anscheinend unmöglich, weitere Fälle auszuschließen. Alle gefundenen Cartanmatrizen haben tatsächlich gerade die Elementarteiler 64 *und mehrfach* 1*, wie in Lemma 5.18 angegeben. Weiter können wir mit den gefundenen verallgemeinerten Zerlegungszahlen zu jedem B-Element $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ die Beitragsmatrix $d^u C_{b_u}^{-1} \overline{d^u}^T$ berechnen. Hieraus können wir für jeden $\mathcal{F}$-stabilen verallgemeinerten Charakter μ von D und jeden Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ die Zerlegung von $\mu * \chi$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination irreduzibler Charaktere von B ermitteln. Führen wir dies für eine $\mathbb{Z}$-Basis der $\mathcal{F}$-stabilen verallgemeinerten Charaktere von D durch, so stellen wir in den obigen Fällen stets fest, dass $\mu * \chi$ sogar eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination irreduzibler Charaktere von B ist. Deshalb sollte auch die $*$-Konstruktion keine weiteren Informationen liefern können.*

5.3 Defektgruppen $Q_{2^n} \times Q_8$

Wir betrachten Blöcke B von G mit Defektgruppe $D := Q_{2^n} \times Q_8$ und Fusionssystem $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}_{Q_8}(Q_8)$, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges Fusionssystem auf Q_{2^n} ist. Die möglichen Fälle für $\mathcal{F}'$ wurden in [21, Theorem 5.3] bestimmt. Diese Fälle unterscheiden sich in der Anzahl $r \in \{0, 1, 2\}$ der Konjugationsklassen $\mathcal{F}'$-wesentlicher Untergruppen von Q_{2^n}. Im Fall $n = 3$ gibt es hingegen nur zwei Möglichkeiten und wir setzen abweichend $r = 2$ im nichtnilpotenten dieser Fälle. Ist $r = 0$, so ist $\mathcal{F}$ nilpotent und die Struktur von B ist leicht zu beschreiben.

Satz 5.24. *Ist $\mathcal{F}$ nilpotent, so gilt $k(B) = 5 \cdot 2^{n-2} + 15$, $l(B) = 1$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 2^n$ und $k_2(B) = 2^{n-2} - 1$.*

Beweis. Die Grade der irreduziblen komplexen Charaktere von D ergeben sich unmittelbar aus den Charaktertafeln von Q_{2^n} und Q_8, welche bekannt sind. Die Aussage folgt dann mit Satz 1.46. □

Im Folgenden sei also stets $r \in \{1, 2\}$. Wir schreiben

$$D = \langle v, w\rangle \times \langle x, y\rangle$$

mit $v^{2^{n-1}} = 1$, $w^2 = v^{2^{n-2}}$, $wvw^{-1} = v^{-1}$, $x^4 = 1$, $y^2 = x^2$ und $yxy^{-1} = x^{-1}$.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Hierbei beschränken wir uns für $r = 1$ auf den Fall, in dem $\langle v^{2^{n-3}}, vw\rangle \times \langle x, y\rangle \cong Q_8 \times Q_8$ wesentlich ist.

Lemma 5.25. *Ist $r = 2$, so bilden $(v^i q, b_{v^i q})$ für $q \in \{1, x^2, x, y, xy\}$ und $i \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$ ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Für $r = 1$ kommen noch die B-Elemente (wq, b_{wq}) für $q \in \{1, x^2, x, y, xy\}$ hinzu. Ist $(u, b_u) \in \mathcal{R}$, so hat b_u hierbei stets die Defektgruppe $C_D(u)$.*

Beweis. Da die Fusion auf $\langle x, y\rangle$ trivial ist, ergibt sich die Aussage wie in Lemma 3.13. □

Die Bezeichnung $\mathcal{R}$ für das obige Repräsentantensystem werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden. Wie üblich nutzen wir Satz 1.50 und Satz 1.51, um untere Schranken für $k(B)$ und $l(B)$ zu beweisen.

Lemma 5.26. *Es ist $k(B) \geq 5 \cdot (2^{n-2} + r + 3)$. Im Gleichheitsfall gilt $l(B) = r + 1$.*

Beweis. Wir schätzen $l(b_u)$ für B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ wie im Beweis von Proposition 3.16 ab. Wir beginnen mit dem Fall $u \in Z(D)$. Für $u = x^2$ dominiert b_{x^2} einen Block $\overline{b_{x^2}}$ von $C_G(x^2)/\langle x^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle x^2\rangle \cong Q_{2^n} \times C_2^2$. Nach Proposition 3.16 gilt dann $l(b_{x^2}) = l(\overline{b_{x^2}}) = r + 1$. In den Fällen $u = w^2$ und $u = w^2x^2$ ist $x^2 \in Z(\mathcal{F}_D(b_u))$. Ist (x^2, c_{x^2}) das zugehörige b_u-Element, so dominiert c_{x^2} einen Block $\overline{c_{x^2}}$ von $C_G(\langle u, x^2\rangle)/\langle x^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle x^2\rangle \cong Q_{2^n} \times C_2^2$. Anwendung von Proposition 3.16 und Satz 1.51 liefert $l(b_u) \geq l(c_{x^2}) = l(\overline{c_{x^2}}) = r + 1$. Wegen $x^2 \in Z(\mathcal{F})$ folgt analog $l(B) \geq r + 1$.

Nun betrachten wir B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \notin Z(D)$. Ist $u = q$ oder $u = w^2q$ für $q \in \{x, y, xy\}$, so hat b_u die Defektgruppe $\langle v, w, q\rangle \cong Q_{2^n} \times C_4$ und mit Proposition 3.16 folgt $l(b_u) = r + 1$. In den übrigen Fällen ist $u = v^i q$ oder $u = wq$ (für $r = 1$) mit $q \in \{1, x^2, x, y, xy\}$ und $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$. Dann ist b_u nilpotent, d.h. es gilt $l(b_u) = 1$. Zusammenfassend ergibt sich mit Satz 1.50 die Abschätzung für $k(B)$. Tritt hierbei der Gleichheitsfall ein, so gilt dieser für jede obige Abschätzung und $l(B) = r + 1$ folgt. □

Wie in Unterabschnitt 3.3 können wir auch Olssons Vermutung zeigen.

Lemma 5.27. *Die Olsson-Vermutung $k_0(B) \leq |D : D'| = 16$ ist erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten das B-Element (vx, b_{vx}). Offenbar ist b_{vx} nilpotent. Via Konjugation mit wy ist vx zu seinem Inversen konjugiert. Da $\langle vx\rangle$ beispielsweise nicht von w normalisiert wird, gilt $N_D(\langle vx\rangle) = \langle v, x, wy\rangle$ und $|N_D(\langle vx\rangle)| = 2^{n+2}$. Mit Proposition 1.57 berechnet man $(a_0^{vx}, a_0^{vx}) = 16$. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 1.61. □

Um genauere Informationen über die Blockinvarianten zu erhalten, wenden wir die $*$-Konstruktion an. Zunächst halten wir jedoch einige Charaktere von D fest, welche sich durch Inflation der irreduziblen Charaktere der beiden Faktoren Q_{2^n} und Q_8 ergeben. Da wir die Charaktertafeln von verallgemeinerten Quaternionengruppen als bekannt voraussetzen, verzichten wir auf einen Beweis.

Lemma 5.28. *Die beiden Faktoren Q_{2^n} und Q_8 von D haben die folgenden irreduziblen Charaktere:*

- *Charaktere des ersten Faktors $\langle v, w\rangle \cong Q_{2^n}$:*

	1	v^{2z}	v^{2z+1}	w	vw
$\lambda_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\lambda_{1,2}$	1	1	-1	1	-1
$\lambda_{1,3}$	1	1	1	-1	-1
$\lambda_{1,4}$	1	1	-1	-1	1
$\lambda_{2,i}$	2	$\zeta^{2zi}+\zeta^{-2zi}$	$\zeta^{(2z+1)i}+\zeta^{-(2z+1)i}$	0	0

Hierbei ist $z \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ und ζ eine primitive 2^{n-1}-te Einheitswurzel.

- *Charaktere des zweiten Faktors $\langle x, y\rangle \cong Q_8$:*

	1	x^2	x	y	xy
μ_1	1	1	1	1	1
μ_x	1	1	1	-1	-1
μ_y	1	1	-1	1	-1
μ_{xy}	1	1	-1	-1	1
μ_2	2	-2	0	0	0

Wie üblich kann man diese durch Inflation als Charaktere von D auffassen.

Wir werden im Folgenden die Bezeichnung für die obigen Charaktere ohne weitere Referenz verwenden.

Lemma 5.29. *Die folgenden verallgemeinerten Charaktere von D sind $\mathcal{F}$-stabil:*

(i) $\lambda_{1,1}$,

(ii) $\lambda_{1,4}$ *für* $r = 1$,

(iii) der verallgemeinerte Charakter

$$\lambda'_1 := \begin{cases} \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \lambda_{1,4} - 2 \cdot 1_{\mathrm{Irr}_1(D)} & \text{falls } n = 3, \\ \lambda_{1,2} - \lambda_{1,3} + \lambda_{1,4} & \text{falls } n > 3, \end{cases}$$

(iv) $\lambda_{2,i}$ *für ungerades* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$,

(v) $\lambda'_{2,i} := \lambda_{2,i} + \lambda_{1,3} - r \cdot 1_{\mathrm{Irr}_1(D)}$ *für* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ *mit* $i \equiv 2 \pmod 4$,

(vi) $\lambda'_{2,i} := \lambda_{2,i} - \lambda_{1,3}$ *für* $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ *mit* $i \equiv 0 \pmod 4$,

(vii) μ_1, μ_x, μ_y, μ_{xy} *und* μ_2.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Gestalt des Fusionssystems $\mathcal{F}$. Zu beachten ist hierbei, dass $\mathcal{F}$ keine Konjugationsklassen des zweiten Faktors $\langle x, y\rangle$ fusioniert. □

Auch die Bezeichnungen für diese verallgemeinerten Charaktere werden wir im Folgenden ohne Referenz verwenden. Weiter setzen wir $F := \{\mu_1, \mu_x, \mu_y, \mu_{xy}\}$. Die Charaktere in F sind nach Lemma 5.29 $\mathcal{F}$-stabil, d.h. F kann als Teilmenge von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ aufgefasst werden. Deshalb operiert F durch $*$-Konstruktion auf $\mathrm{Irr}(B)$. Im folgenden Lemma untersuchen wir diese Operation. Für ein gegebenes $q \in \{1, x^2, x, y, xy\}$ bezeichnen wir hierfür die Menge der B-Elemente $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u = v^i q$ und $i \in \mathbb{Z}$ (oder $u = wq$ für $r = 1$) mit $\mathcal{R}_q$.

Proposition 5.30. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und bezeichnen wir mit m_q für $q \in \{1, x^2, x, y, xy\}$ die Summe der Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ mit $(u, b_u) \in \mathcal{R}_q$, so tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(1) $m_q = \frac{1}{4}$ *für alle* $q \in \{x, y, xy\}$, $m_1 = m_{x^2} = \frac{1}{8}$ *und der F-Orbit von χ hat die Länge 4;*

(2) $m_q = \frac{1}{2}$ *für ein* $q \in \{x, y, xy\}$, $m_u = 0$ *für* $u \in \{x, y, xy\} \setminus \{q\}$ *und der F-Orbit von χ hat die Länge 2;*

(3) $m_q = 0$ *für alle* $q \in \{x, y, xy\}$ *und der F-Orbit von χ hat die Länge 1.*

Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, so tritt für χ der Fall (1) ein.

Beweis. Nach Satz 1.63 ist $m_1+m_{x^2}+m_x+m_y+m_{xy}=1$. Da $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_{x^2}$ B-Elemente (u,b_u) mit $u \in Z(D)$ enthalten, ist $m_1, m_{x^2} > 0$. Weiter ist $(\mu_1-\mu_q)*\chi$ für $q \in \{x,y,xy\}$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Es ergibt sich

$$((\mu_1-\mu_q)*\chi,\chi)_G = 2 \sum_{u \in \{x,y,xy\}\setminus\{q\}} m_u.$$

Dies ist stets eine ganze Zahl. Hieraus folgt, dass $4m_x$, $4m_y$ und $4m_{xy}$ ganze Zahlen sind. Eine kurze Fallunterscheidung liefert, dass einer der obigen drei Fälle für die Werte der m_q für $q \in \{x,y,xy\}$ eintritt. Aus der Form der Charaktere in F folgen damit auch unmittelbar die Aussagen über die Bahnlängen. Die Gestalt von m_1 und m_{x^2} im Fall (1) ergibt sich aus der Ganzzahligkeit von

$$(\mu_2*\chi,\chi)_G = 2m_1 - 2m_{x^2},$$

denn nach Lemma 5.29 ist $\mu_2*\chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Mit Satz 1.65 ergibt sich schließlich, dass für Charaktere von Höhe 0 stets Fall (1) eintritt. □

Die Bezeichnungen für die obigen Fälle werden wir im Folgenden ohne weitere Referenz verwenden. Nachdem wir nun die Operation von F verstanden haben, befassen wir uns mit der Struktur von $\mu_2*\chi$ für χ vom Typ (1).

Proposition 5.31. *Hat $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ den Typ (1), so ist $\mu_2*\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Der so erzeugte Charakter $\mu_2*\chi$ hat Typ (3).*

Beweis. Nach Lemma 5.29 ist μ_2 $\mathcal{F}$-stabil und somit ist $\mu_2*\chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Mit Proposition 5.30 berechnet man direkt:

$$(\mu_2*\chi,\mu_2*\chi)_G = \frac{1}{8}\mu_2(1)\overline{\mu_2(1)} + \frac{1}{8}\mu_2(x^2)\overline{\mu_2(x^2)} = \frac{1}{8}\cdot 4\cdot 2 = 1.$$

Somit ist $\mu_2*\chi$ zumindest bis auf ein Vorzeichen ein irreduzibler Charakter von B. Wegen $\mu_2(1)=2>0$ ist dieses Vorzeichen positiv. Dass der Charakter $\mu_2*\chi$ den Typ (3) hat, ergibt sich unmittelbar aus $\mu_2(x)=\mu_2(y)=\mu_2(xy)=0$ und der Charakterisierung in Proposition 5.30. □

Nachdem wir in den letzten beiden Propositionen die $*$-Konstruktion mit $\mathcal{F}$-stabilen verallgemeinerten Charakteren des zweiten Faktors $\langle x,y\rangle \cong Q_8$ untersucht haben, tun wir dies im Folgenden für den ersten Faktor $\langle v,w\rangle \cong Q_{2^n}$. Diese Untersuchung ist allerdings wesentlich komplizierter. Um Skalarprodukte berechnen zu können, bestimmen wir zunächst die Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ für $(u,b_u) \in \mathcal{R}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$. Wir bezeichnen die Menge der B-Elemente $(u,b_u) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle v,w\rangle$ mit $\mathcal{U}$.

Lemma 5.32. *Es sei $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben. Ist $(uq,b_{uq}) \in \mathcal{R}$ mit $u \in \langle v,w\rangle \cong Q_{2^n}$ und $q \in \langle x,y\rangle \cong Q_8$, so gilt für den Beitrag $m^{uq}_{\chi\chi}$ des B-Elements (uq,b_{uq}) zum Skalarprodukt $(\chi,\chi)_G$ dann:*

$$|C_D(uq)|m^{uq}_{\chi\chi} = \begin{cases} 2^{n-3}+1 & \textit{falls } u \in \{1,w^2\} \textit{ und } r=1,\\ 2^{n-2}+1 & \textit{falls } u \in \{1,w^2\} \textit{ und } r=2,\\ 1 & \textit{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. Wir schätzen zunächst rationale Teile der Beiträge $m^{uq}_{\chi\chi}$ ab. Ist $u \notin \{1,w^2\}$ und q beliebig, so ist b_{uq} nilpotent mit Defektgruppe $C_D(uq)$ und der rationale Teil von $|C_D(uq)|m^{uq}_{\chi\chi}$ ist nach Satz 1.65 mindestens 1. Im Gleichheitsfall ist hierbei $|C_D(uq)|m^{uq}_{\chi\chi}$ rational. Ist $q \in \{x,y,xy\}$ und $u \in \{1,w^2\}$, so hat b_{uq} die Defektgruppe $C_D(uq) \cong Q_{2^n} \times C_4$. Blöcke dieser Art wurden in Unterabschnitt 3.3 behandelt. Die Werte von r stimmen für B und b_{uq} überein und nach Proposition 3.17 hat b_{uq} abhängig von r die Cartanmatrix $C_{b_{uq}}$ der Form

$$\begin{pmatrix} 2^n+8 & 16\\ 16 & 32\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 2^n+8 & 8 & 8\\ 8 & 16 & .\\ 8 & . & 16\end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Wir betrachten die Matrizen

$$d^{uq} \cdot 2^{n+2} C_{b_{uq}}^{-1} \cdot \overline{d^{uq}}^T = |C_D(uq)| (m^{uq}_{\psi_1 \psi_2})_{\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Irr}(B)},$$

wobei $2^{n+2} C_{b_{uq}}^{-1}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2^{n-3}+1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2^{n-2}+1 & 1 \\ -2 & 1 & 2^{n-2}+1 \end{pmatrix} \tag{*}$$

hat. Lemma 1.66 liefert, dass der rationale Teil von $|C_D(uq)| m^{uq}_{\chi\chi}$ eine ungerade ganze Zahl ist. Betrachtung der quadratischen Formen zu obigen zwei Matrizen liefert nach einer kurzen Fallunterscheidung, dass der rationale Teil von $|C_D(uq)| m^{uq}_{\chi\chi}$ wenigstens $2^{n-3}+1$ bzw. $2^{n-2}+1$ ist. Im Gleichheitsfall ist $|C_D(uq)| m^{uq}_{\chi\chi}$ hierbei wieder rational. Man berechnet nun für $q \in \{x, y, xy\}$

$$\sum_{(t,b_t) \in \mathcal{R}_q} \widetilde{m}^t_{\chi\chi} = 2 \cdot \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16} \cdot (2-r) + (2^{n-2}-1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

wobei die $\widetilde{m}^t_{\chi\chi}$ die obigen Abschätzungen für die rationalen Teile der $m^t_{\chi\chi}$ sind. Aus Proposition 5.30 folgt nun, dass für diese Abschätzungen für $(t, b_t) \in \mathcal{R}_q$ und $q \in \{x, y, xy\}$ der Gleichheitsfall eintritt. Das impliziert die im Lemma behauptete Gestalt für diese Beiträge.

Um die Aussage für die übrigen B-Elemente zu beweisen, schätzen wir zunächst $m^{x^2}_{\chi\chi}$ ab. Wie üblich dominiert der Block b_{x^2} einen Block $\overline{b_{x^2}}$ von $C_G(x^2)/\langle x^2 \rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle x^2 \rangle \cong Q_{2^n} \times C_2^2$. Solche Blöcke haben wir in Unterabschnitt 3.3 untersucht. Wieder stimmen die Werte von r für B und $\overline{b_{x^2}}$ überein. Bezeichnet $C_{b_{x^2}}$ die Cartanmatrix von b_{x^2}, so hat $2^{n+3} C_{b_{x^2}}^{-1}$ nach Proposition 3.17 bis auf Basiswahl eine Gestalt wie in (*). Wegen $\mathrm{ord}(x^2) = 2$ ist der Beitrag $m^{x^2}_{\chi\chi}$ rational. Wie oben folgt dann $2^{n+3} m^{x^2}_{\chi\chi} \ge 2^{n-3}+1$ für $r = 1$ und $2^{n+3} m^{x^2}_{\chi\chi} \ge 2^{n-2}+1$ für $r = 2$.

Wir bezeichnen nun analog zu oben die bisherigen Abschätzungen für die rationalen Parts von $m^t_{\chi\chi}$ für $(t, b_t) \in \mathcal{R}' := (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_{x^2}) \setminus \{(1, B), (w^2, b_{w^2}), (w^2x^2, b_{w^2x^2})\}$ mit $\widetilde{m}^t_{\chi\chi}$. Dann ist

$$\sum_{(t,b_t) \in \mathcal{R}'} \widetilde{m}^t_{\chi\chi} = \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} + 2 \cdot \frac{1}{32} \cdot (2-r) + 2 \cdot (2^{n-2}-1) \cdot \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}}.$$

Setzen wir nun weiter $\widetilde{m}^1_{\chi\chi} = \widetilde{m}^{w^2}_{\chi\chi} = \widetilde{m}^{w^2x^2}_{\chi\chi} = \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}}$, so ist $\sum_{(t,b_t) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_{x^2}} \widetilde{m}^t_{\chi\chi} = \frac{1}{4}$. Nach Proposition 5.30 hat die Summe $\sum_{(t,b_t) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_{x^2}} m^t_{\chi\chi}$ ebenfalls den Wert $\frac{1}{4}$.

Wir wollen $m^1_{\chi\chi} = m^{x^2}_{\chi\chi} = m^{w^2}_{\chi\chi} = m^{w^2x^2}_{\chi\chi} = \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}}$ zeigen. Da 1, x^2, w^2 und w^2x^2 maximal Ordnung 2 haben, sind diese Beiträge zumindest rational. Da die Elemente zentral in D liegen, gilt zudem sicher $m^1_{\chi\chi}, m^{w^2}_{\chi\chi}, m^{w^2x^2}_{\chi\chi} \ge \frac{1}{2^{n+3}}$. Sind nun λ und μ $\mathcal{F}$-stabile verallgemeinerte Charaktere von D mit $|\lambda(u)|, |\mu(u)| \le 2$ für $u \in D$, so weicht nach Satz 1.63 folglich

$$\sum_{(t,b_t) \in \mathcal{R}} \lambda(t) \overline{\mu(t)} \widetilde{m}^t_{\chi\chi}$$

um höchstens $3 \cdot \frac{2^{n-4+r}}{2^{n+3}} \cdot 8 < 1$ von $(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G \in \mathbb{Z}$ ab. Ist die obige Summe also ganzzahlig, so ist sie gleich $(\lambda * \chi, \mu * \chi)_G$.

Diese Aussage wenden wir nun auf mehrere Skalarprodukte an. Nach Lemma 5.29 genügen die

Charaktere $1_{\mathrm{Irr}_1(D)}$, $\lambda_{2,1}$ und μ_2 der obigen Bedingung. Man berechnet:

$$\begin{aligned}\sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,1}(t)\overline{\lambda_{2,1}(t)}\widetilde{m}^t_{\chi\chi} &= 8\cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} |\lambda_{2,1}(u)|^2\cdot \widetilde{m}^u_{\chi\chi} \\ &= 8\cdot\left(2\cdot 4\cdot \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} + \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} |\zeta^z+\zeta^{-z}|^2\cdot \frac{1}{2^{n+2}}\right) \\ &= \frac{2^{n+2+r}+64}{2^{n+3}} + \frac{16}{2^{n+3}}\cdot(2^{n-1}-4) = r+1\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Hierbei ist ζ eine primitive 2^{n-1}-te Einheitswurzel. Folglich ist $(\lambda_{2,1}*\chi, \lambda_{2,1}*\chi)_G = r+1$. Da $|\lambda_{2,1}(t)|^2 = 4$ genau für $t\in\{1,x^2,w^2,x^2w^2\}$ ist und $|\lambda_{2,1}(t)|^2$ ansonsten echt kleiner ist, folgt hieraus auch

$$m^1_{\chi\chi}+m^{x^2}_{\chi\chi}+m^{w^2}_{\chi\chi}+m^{w^2x^2}_{\chi\chi} = \widetilde{m}^1_{\chi\chi}+\widetilde{m}^{x^2}_{\chi\chi}+\widetilde{m}^{w^2}_{\chi\chi}+\widetilde{m}^{w^2x^2}_{\chi\chi} = 4\cdot\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}}.$$

Weiter ergibt sich $m^t_{\chi\chi} = \widetilde{m}^t_{\chi\chi}$ für alle übrigen t. Aus Proposition 5.30 folgt nun $m^1_{\chi\chi}+m^{w^2}_{\chi\chi} = m^{x^2}_{\chi\chi}+m^{w^2x^2}_{\chi\chi}$. Mit der gleichen Notation berechnen wir weiter:

$$\begin{aligned}\sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,1}(t)\overline{1_{\mathrm{Irr}_1(D)}(t)}\widetilde{m}^t_{\chi\chi} &= 8\cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,1}(u)\cdot \widetilde{m}^u_{\chi\chi} \\ &= 8\cdot\left((2-2)\cdot \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} + \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^z+\zeta^{-z})\cdot \frac{1}{2^{n+2}}\right) \\ &= 0\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Es folgt $(\lambda_{2,1}*\chi,\chi)_G = 0$. Da $\lambda_{2,1}(1)$ und $\lambda_{2,1}(w^2)$ verschiedene Vorzeichen haben, ergibt eine analoge Rechnung nun $m^1_{\chi\chi}+m^{x^2}_{\chi\chi} = m^{w^2}_{\chi\chi}+m^{w^2x^2}_{\chi\chi}$. Schließlich berechnen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,1}(t)\overline{\mu_2(t)}\widetilde{m}^t_{\chi\chi} &= \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,1}(u)\overline{\mu_2(1)}\cdot\widetilde{m}^u_{\chi\chi} + \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,1}(u)\overline{\mu_2(x^2)}\cdot\widetilde{m}^{ux^2}_{\chi\chi} \\ &= (2-2)\sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,1}(u)\cdot\widetilde{m}^u_{\chi\chi} = 0\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Folglich ist $(\lambda_{2,1}*\chi,\mu_2*\chi)_G = 0$ und wie oben folgt $m^1_{\chi\chi}+m^{w^2x^2}_{\chi\chi} = m^{x^2}_{\chi\chi}+m^{w^2}_{\chi\chi}$. Aus den erhaltenen vier Gleichungen folgt insgesamt

$$m^1_{\chi\chi} = m^{x^2}_{\chi\chi} = m^{w^2}_{\chi\chi} = m^{w^2x^2}_{\chi\chi} = \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}}$$

und somit die Behauptung. □

Nun analysieren wir nacheinander die irreduziblen Summanden von $\lambda*\chi$, wobei λ ein $\mathcal{F}$-stabiler verallgemeinerter Charakter des ersten Faktors $\langle v,w\rangle\cong Q_{2^n}$ aus Lemma 5.29 und $\chi\in\mathrm{Irr}_0(B)$ ist. Hierbei werden wir stets feststellen, dass die Summanden den Typ (1) haben.

Proposition 5.33. *Es sei $\chi\in\mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben. Dann ist $\lambda'_1*\chi$ eine vorzeichenbehaftete Summe von drei verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Jeder dieser drei Charaktere hat Typ* (1). *Im Fall $r=1$ ist $\lambda_{1,4}*\chi$ einer dieser Summanden.*

Beweis. Nach Lemma 5.29 ist λ'_1 $\mathcal{F}$-stabil und somit ist $\lambda'_1*\chi$ ein verallgemeinerter Charakter von

B. Mit Lemma 5.32 berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\lambda_1' * \chi, \lambda_1' * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_1'(t)\overline{\lambda_1'(t)} m_{\chi\chi}^t = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} |\lambda_1'(u)|^2 m_{\chi\chi}^u \\
&= 8 \cdot \left(\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot (2^{n-3}-1) + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot 2^{n-3} \cdot 9 + \frac{1}{32} \cdot (2-r) \right) \\
&= \frac{2^{n+r}+16}{2^{n+3}} + \frac{2^{n+1}-16}{2^{n+3}} + \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot (2-r) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (r+1+9+2-r) = 3.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist $\lambda_1' * \chi$ also eine Summe (mit Vorzeichen) von drei verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Da F auf $\mathrm{Irr}(B)$ operiert, gilt dies auch für $\alpha * (\lambda_1' * \chi)$ mit $\alpha \in F$. Man berechnet nun weiter für $\alpha, \beta \in F$ mit $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned}
(\alpha * (\lambda_1' * \chi), \beta * (\lambda_1' * \chi))_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \alpha(t)\lambda_1'(t)\overline{\beta(t)\lambda_1'(t)} m_{\chi\chi}^t \\
&= (1+1+2-2-2) \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} |\lambda_1'(u)|^2 \cdot m_{\chi\chi}^u \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir, dass $\alpha \cdot \overline{\beta}$ auf genau zwei Elementen in $\{x, y, xy\}$ den Wert -1 und auf den übrigen Repräsentanten der $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen von Elementen in $\langle x, y\rangle$ den Wert 1 annimmt. Mit Lemma 1.83 und der Charakterisierung in Proposition 5.30 folgt somit, dass die drei Summanden alle Typ (1) haben.

Für die letzte Aussage stellen wir zunächst fest, dass $\lambda_{1,4}$ nach Lemma 5.29 $\mathcal{F}$-stabil ist. Deshalb können wir $\lambda_{1,4}$ als Element von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}(\mathcal{F}))$ auffassen und es gilt $\lambda_{1,4} * \chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1' * \chi, \lambda_{1,4} * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_1'(t)\overline{\lambda_{1,4}(t)} m_{\chi\chi}^t = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{R}} \lambda_1'(u)\lambda_{1,4}(u) m_{\chi\chi}^u \\
&= 8 \cdot \Bigg(\frac{2^{n-3}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot (2^{n-3}-1) \\
&\qquad + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot 2^{n-3} \cdot (-3) \cdot (-1) + \frac{1}{32} \cdot (-1) \Bigg) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (1+1+3-1) = 1.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Proposition 5.34. *Es sei $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben und $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ ungerade. Dann existieren verschiedene Charaktere $\psi_i, \chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)$ (und χ_2 für $r = 2$) und Vorzeichen $\delta_i, \epsilon_1, \epsilon_2$ mit*

$$\lambda_{2,i} * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \delta_i\psi_i \qquad \textit{bzw.} \qquad \lambda_{2,i} * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \delta_i\psi_i$$

für $r = 1$ bzw. $r = 2$. Die Charaktere χ_1 und χ_2 sind hierbei unabhängig von i. Für die Charaktere ψ_i, χ_1 und χ_2 tritt Fall (1) ein.

Beweis. Nach Lemma 5.29 sind die Charaktere $\lambda_{2,i}$ für ungerades $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ $\mathcal{F}$-stabil. Folglich ist $\lambda_{2,i} * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Mit Lemma 5.32 berechnen wir für ungerade $i, j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda_{2,i} * \chi, \lambda_{2,j} * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,i}(t)\overline{\lambda_{2,j}(t)} m^t_{\chi\chi} = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,i}(u)\overline{\lambda_{2,j}(u)} \cdot m^u_{\chi\chi} \\
&= 8 \cdot \left(2 \cdot 4 \cdot \frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} + \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^{iz} + \zeta^{-iz})(\zeta^{jz} + \zeta^{-jz}) \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \right) \\
&= \frac{2^{n+2+r}+64}{2^{n+3}} + \frac{16}{2^{n+3}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^{(i+j)z} + \zeta^{-(i+j)z} + \zeta^{(i-j)z} + \zeta^{(j-i)z}) \\
&= \frac{2^{n+2+r}+64}{2^{n+3}} + \frac{16}{2^{n+3}} \cdot 2^{n-2} \cdot 2\delta_{ij} - \frac{16}{2^{n+3}} \cdot 4 = r + \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Hierbei sei ζ eine primitive 2^{n-1}-te Einheitswurzel. Um die irreduziblen Summanden der $\lambda_{2,i} * \chi$ zu verstehen, wenden wir Lemma 1.81 an. Die Voraussetzungen dieses Lemmas sind hierbei außer im Fall $r = 2$ und $n = 5$ offensichtlich erfüllt. Für den verbleibenden Fall gilt dies auch, denn sicher verschwindet $d^1(\chi)$ nicht und es gilt $\lambda_{2,i}(1) = 2$ für alle i. Für ungerade $i \in \{0, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ existieren also stets verschiedene Charaktere $\psi_i, \chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)$ (und χ_2 für $r = 2$) und Vorzeichen δ_i, ϵ_1 (und eventuell ϵ_2) mit

$$\lambda_{2,i} * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \delta_i\psi_i \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_{2,i} * \chi = \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \delta_i\psi_i.$$

Die Aussage über die Längen der F-Bahnen der konstruierten Charaktere zeigen wir schließlich wie im Beweis von Proposition 5.33. □

Proposition 5.35. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben und $i \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ mit $i \equiv 2 \pmod 4$, so ist $\lambda'_{2,i} * \chi$ eine Summe (mit Vorzeichen) von genau $4 - r$ verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Genau einer dieser Summanden taucht nicht bereits als Summand von $\lambda'_1 * \chi$ auf. Dieser ist ebenfalls vom Typ* (1).

Beweis. Nach Lemma 5.29 ist $\lambda'_{2,i}$ $\mathcal{F}$-stabil und somit ist $\lambda'_{2,i} * \chi$ ein verallgemeinerter Charakter von B. Mit Lemma 5.32 berechnet man:

$$\begin{aligned}
(\lambda'_{2,i} * \chi, \lambda'_{2,i} * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda'_{2,i}(t)\overline{\lambda'_{2,i}(t)} m^t_{\chi\chi} = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda'_{2,i}(u)\overline{\lambda'_{2,i}(u)} \cdot m^u_{\chi\chi} \\
&= 8 \cdot \Bigg(\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 \cdot (3-r)^2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} |\zeta^{zi} + \zeta^{-zi} + 1 - r|^2 \\
&\qquad + \frac{1}{32} \cdot (2-r) \cdot (-1-r)^2 \Bigg) \\
&= \frac{2^{n+r}+16}{2^{n+3}} \cdot (r^2 - 6r + 9) + \frac{16}{2^{n+3}} \cdot ((2^{n-2} - 1) \cdot (2 + (1-r)^2) - 6 + 4r) \\
&\qquad + \frac{-r^3 + 3r + 2}{4} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \big(r \cdot (r^2 - 6r + 9) + 2 \cdot (2 + (1-r)^2) - r^3 + 3r + 2 \big) \\
&= -r^2 + 2r + 2 = 4 - r.
\end{aligned}$$

Wie üblich sei hierbei ζ eine primitive 2^{n-1}-te Einheitswurzel. Der verallgemeinerte Charakter $\lambda'_{2,i} * \chi$ ist also tatsächlich eine Summe (mit Vorzeichen) von $4 - r$ verschiedenen irreduziblen

Charakteren von B. Analog berechnen wir:

$$\begin{aligned}(\lambda_{2,i}' * \chi, \lambda_1' * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,i}'(t)\overline{\lambda_1'(t)} m_{\chi\chi}^t = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,i}'(u)\overline{\lambda_1'(u)} \cdot m_{\chi\chi}^u \\ &= 8 \cdot \Bigg(\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 \cdot (3-r) + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^{zi} + \zeta^{-zi} + 1 - r) \cdot (-3) \\ &\qquad + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2zi} + \zeta^{-2zi} + 1 - r) \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot (2-r) \cdot (-1-r) \Bigg) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (r \cdot (3-r) + 2 \cdot (1-r) \cdot (-3) + 4 \cdot (1-r) + (2-r) \cdot (-1-r)) \\ &= r - 1.\end{aligned}$$

Im Fall $r = 2$ zeigt dies bereits, dass genau einer der $4 - r = 2$ Summanden von $\lambda_{2,i}' * \chi$ nicht bereits in $\lambda_1' * \chi$ auftaucht. Im Fall $r = 1$ folgt dies ebenfalls mit

$$\begin{aligned}(\lambda_{2,i}' * \chi, \lambda_{1,4} * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,i}'(t)\overline{\lambda_{1,4}(t)} m_{\chi\chi}^t = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,i}'(u)\overline{\lambda_{1,4}(u)} \cdot m_{\chi\chi}^u \\ &= 8 \cdot \Bigg(\frac{2^{n-3}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^{zi} + \zeta^{-zi}) \cdot (-1) \\ &\qquad + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2zi} + \zeta^{-2zi}) \cdot 2 + \frac{1}{32} \cdot (-2) \cdot (-1) \Bigg) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (2+2) = 1\end{aligned}$$

und Proposition 5.33.

Die Aussage über die Länge der F-Bahn des zusätzlichen Charakters zeigen wir schließlich wie im Beweis von Proposition 5.33. $\square$

Proposition 5.36. *Ist $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig und $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ mit $i \equiv 0 \pmod 4$, so ist $\lambda_{2,i}' * \chi$ eine Summe (mit Vorzeichen) von genau zwei irreduziblen Charakteren von B. Genau einer dieser zwei Summanden taucht nicht bereits als Summand von $\lambda_1' * \chi$ auf. Dieser Charakter ist ebenfalls vom Typ* (1).

Beweis. Der Beweis verläuft weitgehend analog zum Beweis von Proposition 5.35. Wieder ist $\lambda_{2,i}'$ nach Lemma 5.29 $\mathcal{F}$-stabil. Mit Lemma 5.32 berechnen wir

$$\begin{aligned}(\lambda_{2,i}' * \chi, \lambda_{2,i}' * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda_{2,i}'(t)\overline{\lambda_{2,i}'(t)} m_{\chi\chi}^t = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda_{2,i}'(u)\overline{\lambda_{2,i}'(u)} \cdot m_{\chi\chi}^u \\ &= 8 \cdot \left(\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} |\zeta^{zi} + \zeta^{-zi} - 1|^2 + \frac{1}{32} \cdot (2-r) \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (r + 2 \cdot 3 + 2 - r) = 2.\end{aligned}$$

Der verallgemeinerte Charakter $\lambda_{2,i}' * \chi$ ist folglich stets eine vorzeichenbehaftete Summe von zwei verschiedenen irreduziblen Charakteren von B. Wegen

$$\begin{aligned}
(\lambda'_{2,i} * \chi, \lambda'_1 * \chi)_G &= \sum_{(t,b_t)\in\mathcal{R}} \lambda'_{2,i}(t)\overline{\lambda'_1(t)} m^t_{\chi\chi} = 8 \cdot \sum_{(u,b_u)\in\mathcal{U}} \lambda'_{2,i}(u)\overline{\lambda'_1(u)} \cdot m^u_{\chi\chi} \\
&= 8 \cdot \Bigg(\frac{2^{n-4+r}+1}{2^{n+3}} \cdot 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-2}-1} (\zeta^{zi} + \zeta^{-zi} - 1) \cdot (-3) \\
&\qquad + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{z=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2zi} + \zeta^{-2zi} - 1) \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot (2-r) \Bigg) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (r + 2 \cdot (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + 2 - r) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ist einer dieser Summanden bereits Summand von $\lambda'_1 * \chi$. Die Aussage über den Typ des anderen Charakters folgt nun wie im Beweis von Proposition 5.33. □

Nun haben wir genug Informationen gesammelt, um die Blockinvarianten von B zu berechnen.

Satz 5.37. *Es tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) $r = 1$, $n = 4$, $k(B) = 40$, $l(B) = 2$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 16$, $k_2(B) = 7$ *und* $k_3(B) = 1$*;*

(ii) $r = 1$, $n > 4$, $k(B) = 5 \cdot (2^{n-2} + 4)$, $l(B) = 2$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 2^n$, $k_2(B) = 2^{n-2} - 1$, $k_{n-2}(B) = 4$ *und* $k_{n-1}(B) = 1$*;*

(iii) $r = 2$, $n = 3$, $k(B) = 35$, $l(B) = 3$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 16$ *und* $k_2(B) = 3$*;*

(iv) $r = 2$, $n = 4$, $k(B) = 45$, $l(B) = 3$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 16$, $k_2(B) = 11$ *und* $k_3(B) = 2$*;*

(v) $r = 2$, $n > 4$, $k(B) = 5 \cdot (2^{n-2} + 5)$, $l(B) = 3$, $k_0(B) = 16$, $k_1(B) = 2^n$, $k_2(B) = 2^{n-2} - 1$, $k_{n-2}(B) = 8$ *und* $k_{n-1}(B) = 2$.

Beweis. Es sei $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ beliebig gegeben. Wir haben in Proposition 5.33, Proposition 5.34, Proposition 5.35 und Proposition 5.36 die Gestalt von $\lambda * \chi$ für verschiedene $\mathcal{F}$-stabile Charaktere λ von D untersucht. Stets haben wir festgestellt, dass die irreduziblen Summanden von $\lambda * \chi$ vom Typ (1) sind. Wir erhalten die F-Orbits dieser Summanden als irreduzible Summanden von $\alpha * (\lambda * \chi)$ für $\alpha \in F$. In Proposition 5.31 haben wir schließlich die $*$-Konstruktion von μ_2 mit den obigen Summanden untersucht. Insgesamt ergibt sich, dass für jede $\mathbb{Z}$-Linearkombination η der verallgemeinerten Charaktere $\lambda \cdot \mu$ für $\lambda \in \{\lambda_{1,1}, \lambda'_1, \lambda_{2,i}, \lambda'_{2,j}\}$ und $\mu \in \{\mu_1, \mu_x, \mu_y, \mu_{xy}, \mu_2\}$ mit $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ ungerade und $j \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ gerade der verallgemeinerte Charakter $\eta * \chi$ stets höchstens

$$(4+1) \cdot (1 + 3 + 2^{n-3} + r + 2^{n-4} + 2^{n-4} - 1) = 5 \cdot (2^{n-2} + r + 3)$$

irreduzible Summanden mit nichtverschwindenden Vorfaktoren hat. Andererseits ist

$$\eta := (3\lambda_{1,1} + \lambda'_1 + \lambda_{2,1}) \cdot (\mu_1 + \mu_x + \mu_y + \mu_{xy} + 2\mu_2)$$

für $n = 3$ bzw.

$$\eta := \left(\lambda_{1,1} \cdot (1 + 2^{n-4} \cdot r) + \lambda'_1 + 2 \sum_{i=0}^{2^{n-3}-1} \lambda_{2,2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-3}-1} \lambda'_{2,2i} \right) \cdot (\mu_1 + \mu_x + \mu_y + \mu_{xy} + 2\mu_2)$$

für $n > 3$ der reguläre Charakter von D und nach Satz 1.72 ist jeder irreduzible Charakter von B Summand von $\eta * \chi$. Mit Lemma 5.26 folgen $k(B) = 5 \cdot (2^{n-2} + r + 3)$ und $l(B) = r + 1$. Außerdem tritt in den obigen Abschätzungen überall der Gleichheitsfall ein. Somit haben tatsächlich alle durch Proposition 5.33, Proposition 5.34, Proposition 5.35 und Proposition 5.36 konstruierten

Charaktere vom Typ (1) verschiedene F-Bahnen, wenn in den Propositionen nichts Gegenteiliges behauptet wird. Es gibt also genau $4\cdot(2^{n-2}+r+3)$ irreduzible Charaktere vom Typ (1). Auch die durch Anwendung von Proposition 5.31 konstruierten irreduziblen Charaktere müssen verschieden sein, d.h. es gibt genau $2^{n-2}+r+3$ irreduzible Charaktere vom Typ (3). Charaktere vom Typ (2) existieren nicht.

Wir wenden diese Beobachtungen nun auf die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix d^{x^2} an. Der Block b_{x^2} dominiert einen Block $\overline{b_{x^2}}$ von $C_G(x^2)/\langle x^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle x^2\rangle \cong Q_{2^n}\times C_2^2$. Blöcke mit dieser Defektgruppe wurden in Unterabschnitt 3.3 untersucht. Die Werte von r stimmen für $\overline{b_{x^2}}$ und B überein und Proposition 3.17 liefert, dass eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x^2})$-Basis $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_{r+1}\}$ existiert, sodass b_{x^2} bezüglich dieser Basis die Cartanmatrix

$$C_{b_{x^2}} = 8\begin{pmatrix}2^{n-2}+2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad C_{b_{x^2}} = 8\begin{pmatrix}2^{n-2}+2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & .\\ 2 & . & 4\end{pmatrix}$$

hat.

Wir nehmen nun zunächst $r=1$ an. Betrachtung der Matrix $|D|C_{b_{x^2}}^{-1}$ wie im Beweis von Lemma 5.32 liefert, dass $\psi\in\mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0 hat, wenn $d^{x^2}_{\varphi_2}(\psi)$ ungerade ist. Nach Proposition 5.30 haben diese Charaktere eine F-Bahn der Länge 4 und nach Lemma 5.27 gibt es höchstens vier solche F-Bahnen. Für die übrigen irreduziblen Charaktere ψ vom Typ (1) ist $d^{x^2}_{\varphi_2}(\psi)$ eine gerade ganze Zahl. Für jede der obigen F-Bahnen liefert $*$-Konstruktion mit μ_2 jeweils einen irreduziblen Charakter vom Typ (3). Eine kurze Fallunterscheidung liefert nun mit $k(B)=5\cdot(2^{n-2}+4)$ bis auf Vorzeichen von Zeilen die folgende Gestalt:

$$d^{x^2} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|cc|ccc|cc|cccc|c}1 & \ldots & 1 & 2 & \ldots & 2 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 & . & \ldots & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ . & \ldots & . & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4\end{array}\right)^T.$$

Hierbei befinden sich im ersten Block 2^n-4, im zweiten Block $2^{n-2}-1$ und im dritten und fünften Block jeweils 8 Zeilen. In jedem zweiten Block finden sich die Zeilen zu Charakteren, die durch $*$-Konstruktion mit μ_2 und den Charakteren aus dem vorhergehenden Block hervorgehen. Berechnung von Beiträgen liefert nun mit Satz 1.64 die Aussagen zu den $k_i(B)$ für $i\ge 0$. Hierbei ist zu beachten, dass für $n=4$ die Charakterhöhen 2 und $n-2$ zusammenfallen.

Nun sei $r=2$. Eine analoge Argumentation liefert, dass ein Charakter $\psi\in\mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0 hat, wenn $d^{x^2}_{\varphi_2}(\psi)+d^{x^2}_{\varphi_3}(\psi)$ ungerade ist. Mit $k(B)=5\cdot(2^{n-2}+5)$ ergibt sich wieder die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix d^{x^2} der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|c}1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & . & \ldots & . & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & . & \ldots & . & \ldots\\ . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots\\ . & \ldots & . & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & . & \ldots & . & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 & \ldots\end{array}\right)^T$$

bis auf Vorzeichen von Zeilen. Der erste Block enthält hierbei 2^n-4 Zeilen und die Blöcke zwei bis sieben enthalten jeweils genau 4 Zeilen. Aus Platzgründen haben wir ausschließlich die Charaktere vom Typ (1) aufgeführt. Die Charaktere vom Typ (3) ergeben sich aus diesen durch $*$-Konstruktion mit μ_2. Anwendung von Satz 1.64 liefert nun wieder die Höhen der Charaktere. Die Fälle $n\in\{3,4\}$ sind wieder gesondert zu behandeln, da dort Höhen zusammenfallen. $\square$

Es folgt auch, dass alle Vermutungen aus Abschnitt 2 für den Block B erfüllt sind. Der Beweis der Gewichtsvermutung von Alperin verläuft hierbei wie der Beweis von [77, Theorem 2.8]. Wir umreißen einen weiteren Beweisansatz für Satz 5.37, da er eine interessante Methode nutzt.

Bemerkung 5.38. *Für $q\in\{1,x^2,x,y,xy\}$ bezeichnen wir mit l_q die Summe der $l(b_u)$ mit $(u,b_u)\in\mathcal{R}_q$. Argumentieren wir wie im Beweis von Lemma 5.26, so folgen $l_x=l_y=l_{xy}=2^{n-2}+r+3$, $l_1=2^{n-2}-r+1+l(b_{w^2})+l(B)$ und $l_{x^2}=2^{n-2}+2+l(b_{w^2x^2})$. Aus Satz 5.37 folgt tatsächlich sogar $l_{x^2}=2^{n-2}+r+3$ bzw. $l(b_{w^2x^2})=r+1$. Da $b_{w^2x^2}$ einen Block $\overline{b_{w^2x^2}}$ von $C_G(w^2x^2)/\langle w^2x^2\rangle$ mit*

Defektgruppe $D/\langle w^2x^2\rangle \cong Q_{2^n} * Q_8$ *dominiert, würde sich diese Aussage wohl auch durch Analyse von Blöcken mit Defektgruppe* $Q_{2^n} * Q_8$ *ergeben. Über solche Blöcke ist jedoch leider nicht viel bekannt. Wir gehen im Folgenden dennoch davon aus, dass uns* $l(b_{w^2x^2}) = r+1$ *bekannt ist und beschreiben darauf aufbauend eine einfachere Methode zur Bestimmung der Blockinvarianten. Wie oben erwähnt, gilt* $l_{x^2} = 2^{n-2}+r+3$*. Wir machen zunächst zwei weitere Beobachtungen:*

- *Im Beweis von Proposition 5.30 wurde für* $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ *die Formel*

$$(\mu_2 * \chi, \chi)_G = 2m_1 - 2m_{x^2} \in \mathbb{Z}$$

  gezeigt. Hierbei sind m_1 *und* m_{x^2} *wie in Proposition 5.30 definiert. Angewandt auf Charaktere* χ *vom Typ* (2) *folgt* $m_1 = m_{x^2} = \frac{1}{4}$.

- *Wie in Proposition 5.31 liefert* $*$*-Konstruktion von Charakteren* χ *vom Typ* (1) *mit* μ_2 *einen irreduziblen Charakter vom Typ* (3). *Hat nun* $\psi \in \mathrm{Irr}(B)$ *ebenfalls Typ* (1), *so gilt:*

$$(\mu_2 * \chi, \mu_2 * \psi)_G = (\mu_2^2 * \chi, \psi)_G = \sum_{\alpha \in F} (\alpha * \chi, \psi)_G$$

  Sind also die F*-Bahnen von* χ *und* ψ *verschieden, so sind auch* $\mu_2 * \chi$ *und* $\mu_2 * \psi$ *verschieden.*

Wir bezeichnen nun mit X_1 *bzw.* X_2 *die Menge der irreduziblen Charaktere von* B*, die vom Typ* (1) *bzw.* (2) *sind. Anwendung von [62, Proposition 2.2] und Proposition 5.30 liefert dann:*

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2^{n-2}+r+3) &= l_x + l_y + l_{xy} = \frac{3}{4}|X_1| + \frac{1}{2}|X_2|, \\ 2^{n-2}+r+3 &= l_{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)|X_1| + \frac{1}{4}|X_2| = \frac{1}{4}(|X_1|+|X_2|). \end{aligned}$$

Hierbei berücksichtigen wir in der zweiten Zeile für jeden F*-Orbit von Charakteren vom Typ* (1) *auch den Charakter, der durch* $*$*-Konstruktion mit* μ_2 *entsteht. Diese beiden Aussagen zusammen zeigen* $|X_1| = 4\cdot(2^{n-2}+r+3)$ *und* $|X_2| = 0$*. Nun können wir weiter wie im Beweis von Satz 5.37 argumentieren. So vermeiden wir die Notwendigkeit von Lemma 5.32 und den nachfolgenden Berechnungen.*

6 Wesentliche Untergruppen vom Typ $C_2 \times Q_8$

In diesem Abschnitt untersuchen wir Blöcke B von G, deren Defektgruppe D eine der Gruppen ist, die in [67, Section 3] untersucht wurden. Dort haben wir 2-Gruppen mit genau drei Involutionen behandelt, für die ausschließlich Untergruppen vom Typ $C_2 \times Q_8$ als $\mathcal{F}$-wesentliche Untergruppen in saturierten Fusionssystemen $\mathcal{F}$ auftreten. Der dort in [67, Corollary 3.9] und [67, Theorem 3.11 (i)] auftretende Fall $D \cong C_2 \times Q_{2^n}$ für $n \geq 3$ wurde bereits in [77] bzw. in Satz 3.12 behandelt. Das folgende Resultat beschreibt die Blockinvarianten in einem in [67, Section 3] auftretenden Spezialfall.

Proposition 6.1. *Ist D die eindeutige Gruppe aus [67, Theorem 3.10], so ist $\mathcal{F}$ nilpotent und es gilt $k(B) = 11$, $l(B) = 1$, $k_0(B) = 8$, $k_1(B) = 2$ und $k_2(B) = 1$.*

Beweis. Die Gruppe mit den Eigenschaften aus [67, Theorem 3.10] lässt sich leicht als die Gruppe mit Nummer [32, 8] in der Small Groups Library von GAP identifizieren. In diesem Theorem wurde auch bereits festgestellt, dass $\mathcal{F}$ stets nilpotent ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 1.46 aus der Struktur der Charaktertafel von D, welche sich mit GAP oder leicht per Hand ermitteln lässt. $\square$

Nun untersuchen wir Defektgruppen der Gestalt

$$D \cong \langle x, y, z : x^4 = y^{2^{k-3}} = 1, z^2 = y^{2^{k-4}}, zyz^{-1} = y^{-1}, xyx^{-1} = y^{-1}, xzx^{-1} = yz \rangle$$

für ein $k \geq 5$. Diese treten in [67, Theorem 3.11 (ii)] auf.

Proposition 6.2. *Ist D eine Gruppe wie in [67, Theorem 3.11 (ii)] mit Ordnung $|D| = 2^k$ für $k \geq 5$, so tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) $\mathcal{F}$ ist nilpotent und es gilt $k(B) = 2^{k-2} + 6$, $l(B) = 1$, $k_0(B) = 8$ und $k_1(B) = 2^{k-2} - 2$.

(ii) $\mathcal{F}$ ist nicht nilpotent und es gilt $k(B) = 2^{k-2} + 8$, $l(B) = 2$, $k_0(B) = 8$, $k_1(B) = 2^{k-2} - 2$ und $k_{k-3}(B) = 2$.

Beweis. Die Gruppe D ist isomorph zu der Gruppe in [82, Theorem 3.19 (12)] mit Parametern $n = k - 3$, $m = 2$ und $i = n$ ist. Das folgt unmittelbar durch Umbenennung der Variablen x, y, z in [67, Theorem 3.11 (ii)] zu a, v, x in [82, Theorem 3.19 (12)]. Die Behauptung in (ii) folgt nun aus [81, Theorem 3.3], wo die Blockinvarianten für diesen Fall bestimmt werden. Im Beweis dieses Theorems wird zudem $k(D) = 2^{k-2} + 6$ festgestellt. Man zeigt leicht, dass D' Index 8 in D hat und somit gilt $k_1(D) = 8$. Wegen $8 + (2^{k-2} - 2) \cdot 4 = 2^k = |D|$ gilt weiter $k_1(D) = 2^{k-2} - 2$. Die Behauptung in (i) folgt nun aus Satz 1.46. $\square$

Wir ermitteln abschließend Blockinvarianten von Blöcken mit Defektgruppen D wie in [67, Theorem 3.14]. Hierfür untersuchen wir zunächst in Unterabschnitt 6.1 einen dabei auftretenden Quotienten.

6.1 Defektgruppen $D_{2^n} \rtimes C_4$

In diesem Unterabschnitt sei B ein Block von G mit Defektgruppe

$$D = \langle v, x, a : v^{2^{n-1}} = x^2 = a^4 = 1, {}^x v = {}^a v = v^{-1}, {}^a x = vx \rangle \cong D_{2^n} \rtimes C_4$$

mit Parametern $n \geq 3$, $m = 2$ und $i = n$ wie in [82, Theorem 3.19 (10)]. Es ist zu beachten, dass wir hier n anders wählen als in [82, Theorem 3.19 (10)]. Nach diesem Theorem gibt es genau drei verschiedene saturierte Fusionssysteme $\mathcal{F}$ auf D und $Q := \langle v^{2^{n-2}}, x, a^2 \rangle \cong C_2^3$ ist bis auf Konjugation der einzige Kandidat für eine $\mathcal{F}$-wesentliche Untergruppe. In den nichtnilpotenten Fällen für $\mathcal{F}$ finden sich die Blockinvarianten von B in [81, Theorem 3.1]. Wir werden die Cartanmatrix von

B untersuchen. Hierbei gehen wir davon aus, dass $\mathcal{F}$ nicht nilpotent ist. Wir unterscheiden also die Fälle $Z(\mathcal{F}) = \langle a^2 \rangle$ und $Z(\mathcal{F}) = \langle v^{2^{n-2}} a^2 \rangle$. Zuerst beschreiben wir die Struktur der Fokalgruppe des Blocks.

Lemma 6.3. *Es ist*

$$\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) \in \{\langle v, x \rangle, \langle v, a^2 x \rangle\} \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{foc} \cong D_{2^n}.$$

Stets gelten $D/\mathfrak{foc} \cong C_4$ *und* $Z(D)/Z(D) \cap \mathfrak{foc} \cong C_2$.

Beweis. Sicherlich ist $\langle v \rangle \trianglelefteq D$. Wegen ${}^a x = vx$ gilt $\langle v \rangle \leq D'$. Andererseits kommutieren die Elemente $x\langle v \rangle$ und $a\langle v \rangle$ in $D/\langle v \rangle$, d.h. $D/\langle v \rangle$ ist abelsch. Folglich ist $D' = \langle v \rangle$. Der Normalisator von Q in D ist offenbar $\langle v^{2^{n-3}}, x, a^2 \rangle \cong D_8 \times C_2$. Da Q $\mathcal{F}$-wesentlich ist, gilt $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) \cong S_3$. Ist also $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ von Ordnung 3 und β der nichttriviale Automorphismus in $\mathrm{Aut}_D(Q)$, so gilt $\beta \circ \alpha \circ \beta = \alpha^{-1}$. Mit dieser Einschränkung prüft man mit GAP oder per Hand nach, dass $\mathfrak{foc}$ tatsächlich die angegebene Gestalt hat. Die übrigen Behauptungen folgen hieraus nun leicht unter Verwendung von $Z(D) = \langle v^{2^{n-2}}, a^2 \rangle$. □

Nun untersuchen wir die Bahnlängen der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf $\mathrm{Irr}(B)$.

Lemma 6.4. *Es ist* $k(B) = 2^n + 6$, $k_0(B) = 8$ *und* $k_1(B) = 2^n - 2$. *Die Menge* $\mathrm{Irr}(B)$ *zerfällt hierbei in* $2^{n-2} + 2$ *Bahnen unter der Operation von* $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$. *Genau eine dieser Bahnen hat die Länge* 2 *und enthält Charaktere von Höhe* 1. *Alle übrigen Bahnen haben die Länge* 4.

Beweis. Die Aussagen zu $k(B)$ und den $k_i(B)$ sind bereits in [81, Theorem 3.1] enthalten. Für die Bahnen betrachten wir das B-Element (ax, b_{ax}). Da ax nicht Element einer Untergruppe aus dem D-Orbit von Q ist, ist $\langle ax \rangle$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert und folglich hat b_{ax} Defektgruppe $C_D(ax)$. Sicher ist hierbei $C_D(ax) \geq \langle ax, a^2 \rangle$. Man berechnet

$$(ax)^2 = ax \cdot axa^{-1} \cdot a = axvxa = av^{-1}a = a^2 v,$$

d.h. $\langle ax, a^2 \rangle \cong C_{2^n} \times C_2$. Wegen ${}^a(ax) = avx \notin \langle ax \rangle$ ist also $C_D(ax) = N_D(\langle ax \rangle) = \langle ax, a^2 \rangle$. Die Defektgruppe $C_D(ax)$ von b_{ax} ist folglich abelsch und $\mathrm{Aut}(C_D(ax))$ ist wegen $n > 1$ eine 2-Gruppe. Der Block b_{ax} ist deshalb nilpotent.

Mit $\mathrm{ord}(ax) = 2^n$ und Proposition 1.57 folgt somit $(a_i^{ax}, a_j^{ax}) = 4\delta_{ij}$ für $i, j \in \{0, \ldots, 2^{n-1}-1\}$. Aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf $\mathrm{Irr}(B)$ (siehe Lemma 6.3) folgt hierbei, dass die nichtverschwindenden Einträge der a_i^{ax} gerade zweimal 1 und zweimal -1 sind. Gibt es irreduzible Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, sodass $a_i^{ax}(\chi)$ und $a_j^{ax}(\chi)$ für $i \neq j$ beide nicht verschwinden, so folgt aus der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auch, dass dies für genau vier Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4$ der Fall ist. Nach einer geeigneten Anordnung dieser Charaktere ist dann

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccccc} a_i^{ax} & . & \ldots & . & 1 & -1 & 1 & -1 & . & \ldots & . \\ a_j^{ax} & . & \ldots & . & 1 & -1 & -1 & 1 & . & \ldots & . \end{array}\right)^T.$$

Hieraus folgt auch, dass a_l^{ax} für $l \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\} \setminus \{i, j\}$ auf $\chi_1, \ldots, \chi_4$ verschwindet.

Wir haben bereits $k_0(B) = 8$ festgestellt. Nach Lemma 1.59 ist $d^{ax}(\chi)$ für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ eine Einheitswurzel. Die entsprechenden Charaktere bilden wegen $(ax)^2 \notin \mathfrak{foc}$ (oder nach Satz 1.75) zwei $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen der Länge 4. Es gibt folglich mindestens $\frac{4 \cdot 2^{n-1} - 8}{2} = 2^n - 4$ weitere Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}_1(B)$, für die die Zerlegungszahlen $d^{ax}(\chi)$ nicht verschwinden. Wegen $(ax)^2 \notin \mathfrak{foc}$ ergibt sich, dass diese Charaktere in $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen der Länge 4 liegen. Aus $k_1(B) = 2^n - 2$ folgt, dass es genau $2^n - 4$ solche Charaktere χ in $2^{n-2} - 1$ Bahnen gibt. Die übrigen zwei Charaktere von Höhe 1 in B bilden nach Lemma 6.3 und Lemma 1.76 eine weitere Bahn. Die Behauptung folgt. □

Schließlich können wir die Cartanmatrix von B bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis bestimmen.

Lemma 6.5. *Die Cartanmatrix von B hat die Elementarteiler 2^{n+2} und 2.*

Beweis. Nach [81, Theorem 3.1] ist $l(B) = 2$ und die Cartanmatrix von B hat genau zwei Elementarteiler. Bekanntlich ist genau einer davon $|D| = 2^{n+2}$. Alle Elementarteiler sind zudem nach Korollar 1.78 und Lemma 6.3 durch 2 teilbar. Es genügt also zu zeigen, dass die Cartanmatrix keine Elementarteiler 2^s für $2 \le s < n+2$ hat. Wir nutzen hierfür die Theorie der unteren Defektgruppen. Ist $Q < D$ mit $|Q| = 2^s$, so existiert ein $u \in Q$ mit $u \notin Z(\mathcal{F})$. Ist b ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(u)$ mit Ordnung der Defektgruppe größer $|Q|$, so gilt nach der Analyse im Beweis von [81, Theorem 3.1] $l(b) = 1$. Folglich ist $m_b^{(1)}(Q) = 0$ und Proposition 1.53 liefert auch $m_B^{(1)}(Q) = 0$. Das zeigt die Behauptung. □

Satz 6.6. *Es existiert eine $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(B)$-Basis, sodass die Cartanmatrix von B bezüglich dieser Basis gleich*

$$\begin{pmatrix} 2^n+2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ist.

Beweis. Wir betrachten die B-Elemente (u, b_u) mit $u = v^{2^i}$ für $i \in \{0, \ldots, n-2\}$. Nach Lemma 6.3 ist $u \in \mathfrak{foc}$, d.h. auf den $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von $\mathrm{Irr}(B)$ sind die verallgemeinerten Zerlegungszahlen d^u konstant. Es ist sicher $C_D(u) \ge \langle ax, a^2\rangle$. Im Beweis von Lemma 6.4 haben wir $\langle ax, a^2\rangle \cong C_{2^n} \times C_2$ gezeigt. Für $i < n-2$ ist weiter ${}^xu = u^{-1} \ne u$ und somit $C_D(u) = \langle ax, a^2\rangle$. Es folgt leicht, dass die Untergruppe $\langle u\rangle \le D$ vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert ist, d.h. dass der Block b_u die Defektgruppe $C_D(u)$ hat. Weiter ergibt sich $N_D(\langle u\rangle) = D$. Im Fall $i = n-2$ ist $u \in Z(D)$ und somit hat b_u die Defektgruppe D. Stets ist hierbei b_u nilpotent. Das folgt für $i < n-2$ wegen $C_D(u) \cong C_{2^n} \times C_2$ und $n > 1$. Im Fall $i = n-2$ lässt sich aus der Analyse im Beweis von [81, Theorem 3.1] entnehmen, dass $l(b_u) = 1$ gilt. Aus [81, Theorem 3.1] folgt dann, dass b_u nilpotent ist.

Wir berechnen im Folgenden die Gestalt der Teile $d^{v^{2^i}}$ der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix von B. Hierfür wenden wir wiederholt Proposition 1.54, Proposition 1.57 und Lemma 6.4 an, werden dies aber nicht jedes Mal explizit erwähnen. Sei zunächst $i = n-2$. Wegen $v^{2^{n-2}} \in Z(D)$ ist $(d^{v^{2^{n-2}}}, d^{v^{2^{n-2}}}) = 2^{n+2}$ und kein Eintrag von $d^{v^{2^{n-2}}}$ verschwindet. Aus Satz 1.64 folgt nun $d^{v^{2^{n-2}}}(\chi) = \pm 2^{h(\chi)}$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Sind χ_1 und χ_2 Repräsentanten der zwei $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von irreduziblen Charakteren der Höhe 0, so sei $d^{v^{2^{n-2}}}(\chi_1) = \delta_1$ und $d^{v^{2^{n-2}}}(\chi_2) = \delta_2$ für Vorzeichen δ_1 und δ_2. Ist χ_3 Repräsentant der $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn der Länge 2, so setzen wir $d^{v^{2^{n-2}}}(\chi_3) = 2\delta_3$ für ein Vorzeichen δ_3.

Sei nun $i = 0$. Wir berechnen $(a_0^v, a_0^v) = 16$ und $(a_j^v, a_j^v) = 8$ für $1 \le j \le 2^{n-3} - 1$. Nach Lemma 1.61 ist $a_0^v(\chi)$ mit $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ ungerade. Orthogonalität von a_0^v und $d^{v^{2^{n-2}}}$ liefert nach eventueller Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_v)$-Basis $a_0^v(\chi_1) = \delta_1$, $a_0^v(\chi_2) = \delta_2$ und $a_0^v(\chi_3) = -2\delta_3$. Aus der Gestalt der $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen und aus $(a_0^v, a_j^v) = 0$ für $1 \le j \le 2^{n-3} - 1$ folgt, dass die nichtverschwindenden Einträge der a_j^v ausschließlich die Werte ± 1 annehmen. Da die a_j^v paarweise orthogonal sind, sind die zugehörigen Mengen an irreduziblen Charakteren für verschiedene j entweder disjunkt oder identisch. Im zweiten Fall existiert je ein $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Orbit, auf dem die Vorzeichen übereinstimmen bzw. auf dem sie voneinander verschieden sind. Orthogonalität zu $d^{v^{2^{n-2}}}$ schließt diese Möglichkeit jedoch aus. Es folgt auch, dass a_0^v und a_j^v für $1 \le j \le 2^{n-3} - 1$ auf verschiedenen Charakteren nichtverschwindende Werte annehmen, denn andernfalls verschwindet a_j^v sicherlich genau auf den Charakteren von Höhe 0 nicht, was wir im Folgenden zu einem Widerspruch führen. Gegebenenfalls ist $d^v(\chi_1) = \pm 1 \pm (\zeta^j + \zeta^{-j})$, wobei $\zeta := \zeta_{2^{n-1}}$ eine 2^{n-1}-te Einheitswurzel ist. Wir betrachten den $\mathcal{F}$-stabilen Charakter $\lambda_{\mathfrak{foc}} := \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})} \lambda$. Wie im Beweis von Proposition 3.7 ist die Summe der Beiträge aller B-Elemente

(v^l, b_{v^l}) für $1 \le l \le 2^{n-2} - 1$ am Skalarprodukt $(\lambda_{\mathfrak{foc}} * \chi_1, \lambda_{\mathfrak{foc}} * \chi_1)_G$ mindestens

$$16\left(2^{n-3} \cdot \frac{3}{2^{n+1}} + \sum_{l=0}^{n-4} 2^l \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 3 + 1 - \frac{1}{2^{n-3}} = 4 - \frac{1}{2^{n-3}}.$$

Fügen wir den Beitrag von $(v^{2^{n-2}}, b_{v^{2^{n-2}}})$ hinzu, so ergibt sich mindestens die Summe $4 - \frac{1}{2^{n-2}}$. Bekanntlich ist $\lambda_{\mathfrak{foc}} * \chi_1$ eine Summe von vier irreduziblen Charakteren von B. Somit beträgt der Beitrag von $(1, B)$ zu obigem Skalarprodukt höchstens $\frac{1}{2^{n-2}}$. Er ist folglich genau $\frac{1}{2^{n-2}}$ und es gilt $m^1_{\chi_1\chi_1} = \frac{1}{2^{n+2}}$.

Wir betrachten die Beitragsmatrix $d^1 C_B^{-1}(d^1)^T$ und setzen $M := d^1(2^{n+2}C_B^{-1})(d^1)^T$. Die Matrix M ist wie $2^{n+2}C_B^{-1}$ eine symmetrische ganzzahlige Matrix. Für die quadratische Form zu M haben wir soeben gezeigt, dass sie die Zahl 1 darstellen kann. Folglich gilt dies auch für die quadratische Form zu $2^{n+2}C_B^{-1}$. Es existiert somit eine Matrix $V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, sodass $2^{n+2}VC_B^{-1}V^T$ diagonal ist und einen Eintrag 1 hat. Die Matrix $(V^T)^{-1}C_B V^{-1}$ ist folglich auch diagonal. Das widerspricht allerdings Lemma 6.5 und Proposition 1.80. Folglich nehmen a_0^v und a_j^v für $1 \le j \le 2^{n-3} - 1$ tatsächlich ihre nichtverschwindenden Werte auf verschiedenen Charakteren an.

Wie im Beweis von Proposition 3.7 untersuchen wir nun die Operation von $\mathcal{G}$. Verschwindet $a_j^v(\chi)$ für ein $j \in \{1, \ldots, 2^{n-3} - 1\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ nicht, so ist $d^v(\chi) = \zeta^j + \zeta^{-j}$. Ist $\gamma \in \mathcal{G}$ ein Automorphismus mit $\zeta \mapsto -\zeta$, so ist ${}^\gamma\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $d^v({}^\gamma\chi) = -d^v(\chi)$. Die acht irreduziblen Charaktere, für die a_j^v nicht verschwindet, liegen also in maximal vier $\mathcal{G}$-Orbits. Ist weiter $1 \le j' \le 2^{n-3} - 1$, wobei die maximale Zweierpotenz, die j und j' teilt, übereinstimmt, so folgt aus der Operation von $\mathcal{G}$, dass die Vereinigung dieser Orbits auch alle Charaktere enthält, auf denen $a_{j'}^v$ nicht verschwindet. Kombinieren wir die Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ und $\mathcal{G}$, so erhalten wir disjunkte Familien $F_1, \ldots, F_{n-3}$ von irreduziblen Charakteren von B mit $|F_k| = 4 \cdot 2^k$ für $k \in \{1, \ldots, n-3\}$. Hierbei sind die rationalen Anteile der Zerlegungszahlen d^u für $u \in \mathfrak{foc}$ jeweils auf den Familien konstant. Insgesamt ergeben sich so $2^n - 8$ Charaktere. Fügen wir die Charaktere in den $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen von χ_1, χ_2 und χ_3 hinzu, so fehlen nach Lemma 6.4 noch vier Charaktere, welche in einer $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahn liegen. Diese fassen wir in der Menge F_0 zusammen. Für die Familien F_k mit $0 \le k \le n-3$ wählen wir nun Vorzeichen $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-3}$ mit $d^{v^{2^{n-2}}}(\chi) = 2\epsilon_k$ für $\chi \in F_k$.

Nun analysieren wir den rationalen Teil von $d^{v^{2^i}}$ für $i \in \{1, \ldots, n-3\}$. Hierbei werden wir induktiv

$$a_0^{v^{2^i}}(\chi) = \begin{cases} \delta_1 & \text{falls } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_1, \\ \delta_2 & \text{falls } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_2, \\ 2\delta_3 & \text{falls } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_3, \\ 2\epsilon_k & \text{falls } \chi \in F_k \text{ für } 0 \le k \le i-2, \\ -2\epsilon_{i-1} & \text{falls } \chi \in F_{i-1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

relativ zu geeigneten $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{v^{2^i}})$-Basen zeigen. Wir nehmen also an, dass wir die Aussage für alle $i' < i$ bereits gezeigt haben. Es ist $(a_0^{v^{2^i}}, a_0^{v^{2^i}}) = 2^{i+4}$. Für $i = 1$ ist also $(a_0^{v^2}, a_0^{v^2}) = 32$. Anwendung von Lemma 1.61 liefert nach einer kurzen Fallunterscheidung $a_0^{v^2}(\chi_1) = \pm 1$, $a_0^{v^2}(\chi_2) = \pm 1$, $a_0^{v^2}(\chi_3) = \pm 2$ und $a_0^{v^2}(\chi) = \pm 2$ für $\chi \in F_0$. Aus der Orthogonalität zu a_0^v und $d^{v^{2^{n-2}}}$ folgt nun die behauptete Gestalt für $a_0^{v^2}$ nach eventueller Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{v^2})$-Basis.

Sei nun also $i > 1$. Nach Lemma 1.61 verschwindet $a_0^{v^{2^i}}(\chi)$ für $\chi \in F_k$ und $k \ge i$. Die Spalte $a_0^{v^{2^i}}$ ist orthogonal zur Differenz $d^{v^{2^{n-2}}} - a_0^{v^{2^{i-1}}}$. Diese Differenz hat den Wert $4\epsilon_{i-2}$ für $\chi \in F_{i-2}$ und sie hat den Wert $2\epsilon_k$ für $k \in \{i-1, \ldots, n-3\}$. Auf den übrigen Charakteren verschwindet die Differenz. Verschwindet $a_0^{v^{2^i}}(\chi)$ für $\chi \in F_{i-1}$ nicht, so verschwindet es auch für $\chi \in F_{i-2}$ nicht. Gegebenenfalls nimmt $a_0^{v^{2^i}}$ nach eventueller Neuwahl der $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{v^{2^i}})$-Basis auf F_{i-1} den Wert $-2\epsilon_{i-1}$ und auf F_{i-2} den Wert $2\epsilon_{i-2}$ an. Orthogonalität zur Differenz $d^{v^{2^{n-2}}} - a_0^{v^{2^s}}$ für $1 \le s \le i-2$ ergibt dann analog insgesamt die oben angegebenen Werte für $\chi \in F_k$ und $0 \leq k \leq n-3$. Lemma 1.61 und Orthogonalität zu $d^{v^{2^{n-2}}}$ liefert dann die übrigen Werte.

Es verbleibt der Fall, in dem $a_0^{v^{2^i}}$ auf F_{i-1} verschwindet. Wie oben folgt dann, dass $a_0^{v^{2^i}}$ auf F_k für $0 \leq k \leq n-3$ verschwindet. Da $a_0^{v^{2^i}}$ auch zu $d^{v^{2^{n-2}}} - a_0^v$ orthogonal ist, verschwindet es auch auf ${}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_3$. Die nichtverschwindenden Werte werden also auf den Charakteren von Höhe 0 angenommen. Wegen $(a_0^{v^{2^i}}, a_0^{v^{2^i}}) \equiv 0 \not\equiv 8 \pmod{16}$ ist das aber ein Widerspruch zu Lemma 1.61 und dieser Fall tritt nicht ein.

Insgesamt haben wir nun alle rationalen Anteile von Zerlegungszahlen zu B-Elementen (u, b_u) mit $u \in \mathfrak{foc} \setminus \{1\}$ bestimmt. Hierbei ist zu beachten, dass $y := a^2$ für $Z(\mathcal{F}) = \langle a^2 \rangle$ bzw. $y := v^{2^{n-2}}a^2$ für $Z(\mathcal{F}) = \langle v^{2^{n-2}}a^2 \rangle$ via a zu vy und via $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ zu $v^{2^{n-2}}$ konjugiert ist. Mit dem Algorithmus aus Unterabschnitt 1.14 können wir nun die Struktur der gewöhnlichen Zerlegungszahlen ermitteln. Sei hierfür c eine beliebige $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Spalten gewöhnlicher Zerlegungszahlen. Orthogonalität zu $d^{v^{2^{n-2}}} - a_0^{v^{2^s}}$ für $1 \leq s \leq n-3$ ergibt wie oben die Existenz eines $\widetilde{c} \in \mathbb{Z}$ mit

$$c(\chi) = \begin{cases} \widetilde{c}\epsilon_j & \text{falls } \chi \in F_k \text{ mit } 0 \leq k \leq n-4, \\ -\widetilde{c}\epsilon_{n-3} & \text{falls } \chi \in F_{n-3}. \end{cases}$$

Ausnutzung der Orthogonalität zu $d^{v^{2^{n-2}}} - a_0^v$ liefert $c(\chi_3) = \widetilde{c}\delta_3$. Schließlich folgt aus der Orthogonalität zu a_0^v die Gleichung

$$4\delta_1 c(\chi_1) + 4\delta_2 c(\chi_2) - 2 \cdot 2\delta_3 c(\chi_3) = 0 \Leftrightarrow \delta_1 c(\chi_1) + \delta_2 c(\chi_2) - \delta_3 c(\chi_3) = 0.$$

Bis auf Basiswahl ergibt sich also

$$d^1(\chi) = \begin{cases} (\delta_1, \delta_1) & \text{für } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_1, \\ (0, -\delta_2) & \text{fall } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_2, \\ (\delta_3, 0) & \text{falls } \chi \in {}^{\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})}\chi_3, \\ (\epsilon_k, 0) & \text{falls } \chi \in F_k \text{ mit } 0 \leq k \leq n-4, \\ (-\epsilon_{n-3}, 0) & \text{falls } \chi \in F_{n-3}. \end{cases}$$

Relativ zu derselben Basis ergibt sich hieraus die obige Gestalt der Cartanmatrix. □

6.2 Defektgruppen $Q_{2^n}.C_4$

In diesem Unterabschnitt ermitteln wir die Blockinvarianten von Blöcken B von G mit Defektgruppe

$$D = \langle v, x, a : v^{2^{n-1}} = 1, x^2 = a^4 = v^{2^{n-2}}, {}^x v = v^{-1}, {}^a v = v^{2^{n-2}-1}, {}^a x = vx \rangle \cong Q_{2^n}.C_4$$

mit Parametern $n \geq 4$ und $m = 2$ wie in [82, Theorem 3.19 (11)]. Auch hier haben wir den Parameter n anders gewählt als in [82, Theorem 3.19 (11)]. Diese Gruppen sind isomorph zu Gruppen in [67, Theorem 3.14], wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 6.7. *(i) Es sei P eine Gruppe wie in [67, Theorem 3.14] mit Erzeugern y', b' und x', Parameter $n' \geq 6$ und Präsentation*

$$\begin{aligned} P \cong \langle y', b', x' : & y'^{2^{n'-2}} = b'^2 = [x', b'] = 1, y'b'y'^{-1} = y'^{2^{n'-3}}b', \\ & x'y'x'^{-1} = y'^{2^{n'-4}-1}b', x'^2 = y'^{2^{n'-3}} \rangle. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi : D \to P$ mit

$$\varphi(v) = y'^2 b' \qquad \varphi(x) = x' \qquad \text{und} \qquad \varphi(a) = y^{2^{n'-3}-2^{n'-5}+1}x'$$

ist dann für $n' = n+2$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Offenbar ist er surjektiv und wegen $|D| = |P|$ ist er auch injektiv, also bijektiv. Vermöge φ sind D und P für diese Parameterwahl also isomorph.

(ii) Faktorisieren wir D nach dem Normalteiler $\langle x^2\rangle$, so erhalten wir eine Gruppe $\overline{D}$ mit Erzeugern $\overline{v}$, $\overline{x}$ und $\overline{a}$ und Relationen

$$\overline{v}^{2^{n-2}} = \overline{x}^2 = \overline{a}^4 = 1, \qquad {}^{\overline{x}}\overline{v} = {}^{\overline{a}}\overline{v} = \overline{v}^{-1} \qquad \text{und} \qquad {}^{\overline{a}}\overline{x} = \overline{v} \cdot \overline{x}.$$

Solche Gruppen haben wir in Unterabschnitt 6.1 untersucht.

Die Fusionssysteme $\mathcal{F}$ auf D wurden in [81, Theorem 3.19 (11)] oder auch in [67, Theorem 3.15] bestimmt. Es gibt genau ein nichtnilpotentes Fusionssystem und die Untergruppe $Q := \langle a^2, v^{2^{n-3}}, x\rangle = \langle a^2v^{2^{n-3}}, v^{2^{n-3}}, x\rangle \cong C_2 \times Q_8$ ist bis auf Konjugation der einzige Kandidat für eine $\mathcal{F}$-wesentliche Untergruppe. Wir gehen im Folgenden zunächst davon aus, dass $\mathcal{F}$ nicht nilpotent ist. Das folgende Lemma beschreibt in dieser Situation ein Repräsentantensystem der $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen von Elementen von D.

Lemma 6.8. *Repräsentanten der Konjugationsklassen von $\mathcal{F}$ sind:*

(i) $1, v^{2^{n-2}} \in Z(D)$,

(ii) $a^2v^{2^{n-3}}$ *mit* $C_D(a^2v^{2^{n-3}}) = \langle a^2, v, x\rangle \cong C_2 \times Q_{2^n}$,

(iii) a^2 *mit* $C_D(a^2) = \langle a, v\rangle$ *und* $|C_D(a^2)| = 2^{n+1}$,

(iv) v^j *für ungerades* $j \in \{1, \dots, 2^{n-3} - 1\}$ *mit* $C_D(v^j) \cong C_2 \times C_{2^{n-1}}$,

(v) v^j *für gerades* $j \in \{2, \dots, 2^{n-2} - 2\}$ *mit* $|C_D(v^j)| = 2^{n+1}$,

(vi) a^2v^j *für gerades* $j \in \{2, \dots, 2^{n-3} - 2\}$ *mit* $C_D(a^2v^j) \cong C_2 \times C_{2^{n-1}}$,

(vii) a^2v^j *für ungerades* $j \in \{-2^{n-3} + 1, \dots, 2^{n-3} - 1\}$ *mit* $|C_D(a^2v^j)| = 2^{n+1}$,

(viii) a *und* a^3 *mit Zentralisator vom Typ* C_8,

(ix) xv^ja^{2i+1} *für* $i \in \{0, 1\}$ *und* $j \in \{0, \dots, 2^{n-3} - 1\}$ *mit* $C_D(xv^ja^{2i+1}) \cong C_{2^n}$.

All diese Elemente sind vollständig $\mathcal{F}$-zentralisiert. Ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ der G-Konjugationsklassen von B-Elementen (u, b_u) ist folglich durch die u dieser Familien gegeben. Weiter hat der Block b_u für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ die Defektgruppe $C_D(u)$.

Beweis. Die Untergruppe $M := \langle a^2, v, x\rangle = \langle a^2v^{2^{n-3}}, v, x\rangle \cong C_2 \times Q_{2^n}$ von D ist normal und enthält Q. Die Elemente $u \in \langle a^2, v\rangle = \langle a^2v^{2^{n-3}}, v\rangle \cong C_2 \times C_{2^{n-1}}$ haben die Form $u = a^{2i}v^j$ mit $i \in \{0, 1\}$ und $j \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$. Sicher ist $C_D(u) \geq \langle a^2, v\rangle$. Der D-Orbit von u hat also nach Bahnformel höchstens die Länge 4. Ist $i = 0$ und j ungerade, so ist $u = v^j$ via Konjugation mit x, a und ax zu v^{-j}, $v^{2^{n-2}j-j}$ und $v^{-2^{n-2}j+j}$ konjugiert und diese drei Elemente und u sind paarweise verschieden. In diesem Fall gilt also $C_D(u) = \langle a^2, v\rangle$. Ist $i = 0$ und $j \notin \{0, 2^{n-2}\}$ eine gerade Zahl, so enthält der Orbit zumindest die Elemente v^j und v^{-j}. Umgekehrt ist dann offenbar sogar $C_D(u) \geq \langle a^2, v, ax\rangle$ und mit der Bahnformel folgt $C_D(u) = \langle a^2, v, ax\rangle$. Ist schließlich $i = 0$ und $j \in \{0, 2^{n-2}\}$, so zeigt man leicht $u \in Z(D)$ und $C_D(u) = D$.

Sei nun also $i = 1$. Via Konjugation mit x, a und ax ist $u = a^2v^j$ zu $a^2v^{2^{n-2}-j}$, $a^2v^{2^{n-2}j-j}$ und $a^2v^{2^{n-2}(j+1)+j}$ konjugiert. Ist $j \notin \{0, 2^{n-3}, 2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-3}\}$ und gerade, so sind diese vier Elemente verschieden und $C_D(u) = \langle a^2, v\rangle$ folgt. Ist j ungerade, so liegen nur die Elemente a^2v^j und $a^2v^{2^{n-2}-j}$ im Orbit und $C_D(u) = \langle a^2, v, ax\rangle$ folgt. Für $j \in \{0, 2^{n-3}, 2^{n-2}, 3\cdot2^{n-3}\}$ schließlich liegen ebenfalls nur zwei verschiedene Elemente im D-Orbit von u. Anwendung der Bahnformel liefert $C_D(u) = \langle a, v\rangle$ für $u \in \{a^2, a^2v^{2^{n-2}}\}$ und $C_D(u) = \langle a^2, v, x\rangle = M$ für $u \in \{a^2v^{2^{n-3}}, a^2v^{3\cdot2^{n-3}}\}$.

Die vier M-Konjugationsklassen, die außerhalb von $\langle a^2, v\rangle$ liegen, werden durch a zu zwei D-Konjugationsklassen fusioniert. Die Elemente in diesen Konjugationsklassen sind wiederum durch

Fusion in $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ zu den Elementen a^2 oder $a^2v^{2^{n-3}}a^2 = v^{2^{n-3}}a^4$ konjugiert. Weitere Fusion findet in M nicht statt.

Wir betrachten nun Konjugationsklassen außerhalb von M. Hier findet wegen $Q \le M$ und $M \trianglelefteq D$ keine Fusion von D-Konjugationsklassen statt. Liegt u zunächst in der Nebenklasse $a\langle a^2, v\rangle$, so hat u die Gestalt $v^j a^{2i+1}$ für $i \in \{0,1\}$ und $j \in \{0,\ldots,2^{n-1}-1\}$. Man berechnet

$$^{v}(v^j a^{2i+1}) = v^j \cdot vav^{-1}a^{-1}a \cdot a^{2i} = v^j \cdot vv^{1-2^{n-2}}a \cdot a^{2i} = v^{j-2^{n-2}+2}a^{2i+1}.$$

Iterative Anwendung zeigt wegen $\mathrm{ggT}(2^{n-1}, 2-2^{n-2}) = 2$, dass die D-Bahn von $v^j a^{2i+1}$ die Nebenklasse $a^{2i+1}v^j\langle v^2\rangle$ enthält. Konjugation mit x liefert

$$\begin{aligned} ^{x}(v^j a^{2i+1}) &= v^{-j} \cdot (^{x}(a^2))^i \cdot {}^{x}a = v^{-j} \cdot (xa^2x^{-1}a^{-2}a^2)^i \cdot xax^{-1}a^{-1}a \\ &= v^{-j} \cdot (xax^{-1}v^{-1}a^{-1}a^2)^i \cdot v^{-1}a = v^{-j} \cdot (v^{2^{n-2}}a^2)^i \cdot v^{-1}a \\ &= v^{-j+2^{n-2}i-1}a^{2i+1}. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die Bahn sogar die Nebenklasse $a^{2i+1}\langle v\rangle$ enthält. Umgekehrt werden die Elemente a und a^3 wenigstens von $\langle a\rangle \cong C_8$ zentralisiert. Die Bahnformel liefert nun, dass es genau zwei Bahnen dieses Typs mit Repräsentanten a und a^3 und Zentralisatoren vom Typ C_8 gibt.

Abschließend untersuchen wir Konjugationsklassen von Elementen vom Typ $u = xv^j a^{2i+1}$ mit $i \in \{0,1\}$ und $j \in \{0,\ldots,2^{n-1}-1\}$. Konjugation mit v, x und vx liefert nach obigen Rechnungen die Elemente $v^2x\cdot v^{j-2^{n-2}+2}a^{2i+1} = xv^{j-2^{n-2}}a^{2i+1}$, $xv^{-j+2^{n-2}i-1}a^{2i+1}$ und $xv^{-j+2^{n-2}(i+1)-1}a^{2i+1}$. Diese drei Elemente und u sind paarweise verschieden. Umgekehrt ist sicher $C_D(u) \ge \langle u\rangle$. Man berechnet:

$$\begin{aligned} u^2 = (xv^j a^{2i+1})^2 = {}^{x}(v^j a^{2i+1})x^2 \cdot v^j a^{2i+1} &= v^{-j+2^{n-2}(i+1)-1}a^{2i+1} \cdot v^j a^{2i+1} \\ &= v^{-j+2^{n-2}(i+1)-1} \cdot {}^{a}(v^j) \cdot a^{4i+2} = v^{-j+2^{n-2}(i+1)-1}v^{2^{n-2}j-j}a^{4i+2} \\ &= v^{-2j+2^{n-2}(i+j+1)-1}a^{4i+2}. \end{aligned}$$

Folglich hat u die Ordnung $2\,\mathrm{ord}(v) = 2^n$ und mit der Bahnformel ergibt sich $C_D(u) \cong C_{2^n}$. Die letzten beiden Behauptungen folgen nun mit Lemma 1.49. $\square$

Wie üblich nutzen wir Satz 1.50 und Satz 1.51 um untere Schranken für $k(B)$ und $l(B)$ zu erhalten.

Lemma 6.9. *Es ist $k(B) - l(B) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 6$ und $l(B) \ge 2$.*

Beweis. Wir wenden Satz 1.50 an und summieren über die B-Elemente in den Familien in Lemma 6.8. Ist (u, b_u) ein B-Element mit u aus den Familien (iv), (vi), (viii) oder (ix), so hat b_u eine abelsche Defektgruppe mit einer 2-Gruppe als Automorphismengruppe. Folglich ist b_u in diesen Fällen nilpotent. Das gilt auch für u aus den Familien (v) und (vii), denn in diesen Fällen wird stets mit u auch $v^{2^{n-3}}$ zentralisiert. Dann kann jedoch keine Fusion in Q stattfinden. Im Fall $u = a^2$ bzw. in Familie (iii) schließlich ist ebenfalls keine Fusion in Q möglich und b_u ist nilpotent.

Die verbliebenen nichttrivialen Elemente u aus Lemma 6.8 sind $v^{2^{n-2}} = x^2$ und $a^2v^{2^{n-3}}$. Der Block $b_{a^2v^{2^{n-3}}}$ hat eine Defektgruppe $\langle a^2, v, x\rangle \cong C_2 \times Q_{2^n}$ und durch Fusion via $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ sind alle Element der Ordnung 4 in $\langle v, x\rangle$ konjugiert. Nach Proposition 3.16 ist somit $l(b_{a^2v^{2^{n-3}}}) = 3$. Der Block $b_{v^{2^{n-2}}} = b_{x^2}$ ist nicht nilpotent und dominiert einen Block $\overline{b_{x^2}}$ von $C_G(x^2)/\langle x^2\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle x^2\rangle$. Diese Defektgruppe wurde nach Bemerkung 6.7 in Unterabschnitt 6.1 untersucht. Mit [81, Theorem 3.1] folgt also $l(b_{x^2}) = l(\overline{b_{x^2}}) = 2$. Insgesamt ergibt sich

$$k(B) - l(B) = 2 + 3 + 1 + 2^{n-4} + (2^{n-3} - 1) + (2^{n-4} - 1) + 2^{n-3} + 2 + 2^{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 6.$$

Wegen $x^2 \in Z(\mathcal{F})$ folgt mit Satz 1.51 weiter $l(B) \ge l(b_{x^2}) = l(\overline{b_{x^2}}) = 2$. $\square$

Lemma 6.10. *Es ist $\mathfrak{foc} := \mathfrak{foc}(\mathcal{F}) = \langle v, x\rangle$ und $D/\mathfrak{foc} \cong C_4$.*

Beweis. Sicher ist $\langle v\rangle \trianglelefteq D$. Wegen ${}^a x = vx$ ist $\langle v\rangle \le D'$. Umgekehrt kommutieren $a\langle v\rangle$ und $x\langle v\rangle$ in $D/\langle v\rangle$, d.h. $D/\langle v\rangle$ ist abelsch und $D' = \langle v\rangle$. Durch Konjugation via $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ sind zusätzlich die Elemente $v^{2^{n-3}}$ und x konjugiert. Somit folgt $\mathfrak{foc} = \langle v, x\rangle$. Der Quotient $D/\mathfrak{foc}$ wird von $a \cdot \mathfrak{foc}$ erzeugt und es gilt $|D : \mathfrak{foc}| = 4$. Die Behauptung folgt. □

Lemma 6.11. *Es ist $k_0(B) = |D : D'| = 8$. Insbesondere ist die Olsson-Vermutung erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten das B-Element $(a, b_a) \in \mathcal{R}$. Nach Lemma 6.8 hat b_a die Defektgruppe $C_D(a) \cong C_8$. Somit gilt mit Satz 1.65 sicherlich $k_0(B) \le 8$. Die freie Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc}) \cong C_4$ (vgl. Lemma 6.10) auf den Charakteren mit nichtverschwindenden Einträgen in d^a liefert die umgekehrte Ungleichung. □

Um weitere Informationen über die numerischen Blockinvarianten zu erhalten, nutzen wir die $*$-Konstruktion. Hierfür müssen wir zunächst $\mathcal{F}$-stabile Charaktere finden und Beiträge $m^u_{\chi\chi}$ für $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ berechnen.

Lemma 6.12. *Die folgenden Charaktere von D sind $\mathcal{F}$-stabil und paarweise verschieden:*

$$\mu_i(u) = \begin{cases} 4 & \text{falls } u = 1, \\ -4 & \text{falls } u = x^2, \\ 2\zeta^{ji} + 2\zeta^{-ji} & \text{falls } u = v^j \text{ und } j \not\equiv 0 \pmod{2^{n-2}} \text{ gerade}, \\ 2\zeta^{(j-2^{n-3})i} + 2\zeta^{(-j+2^{n-3})i} & \text{falls } u = a^2 v^j \text{ und } j \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Hierbei ist $\zeta := \zeta_{2^{n-1}}$ eine primitive 2^{n-1}-te Einheitswurzel und $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$. Auf allen weiteren Repräsentanten der F-Konjuagtionsklassen aus Lemma 6.8 verschwindet μ_i.

Beweis. Die Untergruppe $N := \langle a^2, v\rangle \cong C_2 \times C_{2^{n-1}}$ (vgl. den Beweis von Lemma 6.8) ist offenbar normal in D und die Charaktertafel von N ist bekannt. Die Charaktere α maximaler Ordnung in der Charaktergruppe von N induzieren wir nach D und erhalten die obigen Charaktere. Hierbei ist zu beachten, dass die $\mathcal{F}$-Konjugationsklassen von Elementen in N bereits im Beweis von Lemma 6.8 ermittelt wurden. Die Charaktere μ_i sind $\mathcal{F}$-stabil, denn sie verschwinden auf allen Elementen, die via $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ konjugiert sind. Sie sind außerdem offensichtlich paarweise verschieden. □

Lemma 6.13. *Es seien $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ beliebig gegeben. Der Beitrag $m^u_{\chi\chi}$ des B-Elements (u, b_u) zum Skalarprodukt $(\chi, \chi)_G$ ist dann*

$$m^u_{\chi\chi} = \begin{cases} \frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}} & \text{falls } u = 1 \text{ oder } u = x^2, \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{falls } u = a^2 v^{2^{n-3}}, \\ \frac{1}{|C_D(u)|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 6.9 sind die Blöcke b_u für $u \notin \{1, x^2, a^2 v^{2^{n-3}}\}$ nilpotent. Nach Satz 1.65 ist dann also der rationale Teil von $m^u_{\chi\chi}$ wenigstens $\frac{1}{|C_D(u)|}$. Im Beweis von Lemma 6.9 wurde festgestellt, dass der Block $b_{a^2 v^{2^{n-3}}}$ in Unterabschnitt 3.3 behandelt wurde und $l(b_{a^2 v^{2^{n-3}}}) = 3$ gilt. Der Block b_{x^2} dominiert einen Block $\overline{b_{x^2}}$, wie in Unterabschnitt 6.1 behandelt. Nach Proposition 3.17 und Satz 6.6 haben diese Blöcke also eine Cartanmatrix C_{b_u} der Form

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} + 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & . \\ 4 & . & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2^n + 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

bis auf Basiswahl. Zur Berechnung der Beiträge betrachten wir die Matrizen

$$d^u |C_D(u)| C_{b_u}^{-1} \overline{d^u}^T = |C_D(u)| (m^u_{\psi_1 \psi_2})_{\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Irr}(B)},$$

wobei $|C_D(u)|C_{b_u}^{-1}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2^{n-2}+1 & 1 \\ -2 & 1 & 2^{n-2}+1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2^{n-2}+1 \end{pmatrix}$$

hat. Die Elemente $u \in \{x^2, a^2v^{2^{n-3}}\}$ sind Involutionen. Folglich sind die zugehörigen verallgemeinerten Zerlegungszahlen d^u rational und Satz 1.65 liefert, dass $|C_D(u)|m_{\chi\chi}^u$ eine ungerade ganze Zahl ist. Betrachtung der quadratischen Formen zu obigen zwei Matrizen liefert nach einer kurzen Fallunterscheidung, dass dann stets $|C_D(u)|m_{\chi\chi}^u \geq 2^{n-2}+1$ ist. Somit ist $m_{\chi\chi}^{x^2} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}}$ und $m_{\chi\chi}^{a^2v^{2^{n-3}}} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Schließlich ist sicherlich $m_{\chi\chi}^1 \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ ebenfalls rational. Bei obigen Abschätzungen für die rationalen Teile der $m_{\chi\chi}^u$ ergibt sich stets, dass im Gleichheitsfall $d^u(\chi)$ ein ganzzahliger Vektor multipliziert mit einer $|D|$-ten Einheitwurzel ist. Summieren wir nun über diese minimalen rationalen Anteile, so ergibt sich die Summe

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{n+2}} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-4} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &\quad + (2^{n-3}-1) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + (2^{n-4}-1) \cdot \frac{1}{2^n} + 2^{n-3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2^{n-2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Die tatsächliche Summe über alle Anteile $m_{\chi\chi}^u$ ist nach Satz 1.63 genau 1, d.h. unsere Abschätzungen für die rationalen Parts sind insgesamt um $\frac{1}{16}$ zu niedrig. Um die Abschätzungen zu verbessern, berechnen wir das Skalarprodukt $(\mu_1 * \chi, 1_{\mathrm{Irr}_1(D)} * \chi)_G$ mit μ_1 aus Lemma 6.12. Mit $\zeta := \zeta_{2^{n-1}}$ wie in Lemma 6.12 bilden wir zunächst nur die Summe

$$\begin{aligned} &\sum_{u \in \mathcal{R}} \mu_1(u) \widetilde{m}_{\chi\chi}^u \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2^{n+2}} - 4 \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2k} + \zeta^{-2k}) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-3}} \left(\zeta^{2k-1} + \zeta^{1-2k}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{m}_{\chi\chi}^u$ für $(u, b_u) \in \mathcal{R}$ unsere obige Abschätzung für den rationalen Teil von $m_{\chi\chi}^u$ ist. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Summen $\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} \zeta^{2k}$ und $\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} \zeta^{-2k}$ gegenseitig aufheben, da die zweite Summe in umgekehrter Reihenfolge über die Negativen der Summanden der ersten Summe summiert. Gleiches gilt für die Summe $\sum_{k=1}^{2^{n-3}} \left(\zeta^{2k-1} + \zeta^{1-2k}\right)$. Da $|\mu_1(u)| \leq 4$ und die $\widetilde{m}_{\chi\chi}^u$ insgesamt nur um $\frac{1}{16}$ zu niedrig sind, ist $(\mu_1 * \chi, 1_{\mathrm{Irr}_1(D)} * \chi)_G = 0$. Da der Betrag von μ_1 ausschließlich in 1 und x^2 den Wert 4 annimmt, folgt $m_{\chi\chi}^1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}}$ und $m_{\chi\chi}^u = \widetilde{m}_{\chi\chi}^u$ für die übrigen B-Elemente (u, b_u). □

Nun können wir das Hauptresultat des Abschnitts zeigen, welches die Analyse von Blöcken mit Defektgruppen wie in [67, Section 3] beendet.

Satz 6.14. *Es gelten $k(B) = 2^{n-1}+2^{n-3}+8$, $l(B) = 2$, $k_0(B) = 8$, $k_1(B) = 2^{n-1}-2$, $k_2(B) = 2^{n-3}$ und $k_{n-1}(B) = 2$.*

Beweis. Wir betrachten das B-Element $(x^2, b_{x^2}) \in \mathcal{R}$. Wie im Beweis von Lemma 6.13 hat der Block b_{x^2} die Cartanmatrix

$$C_{b_{x^2}} = \begin{pmatrix} 2^n+4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

bis auf Wahl einer $\mathbb{Z}\,\mathrm{IBr}(b_{x^2})$-Basis $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Nach Lemma 6.11 gibt es genau acht Charaktere von Höhe 0 in B und nach Lemma 6.10 und Satz 1.75 bilden diese Charaktere genau zwei $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen der Länge 4. Betrachtung der Beitragsmatrix $d^{x^2} C_{b_{x^2}}^{-1} (d^{x^2})^T$ mit

$$C_{b_{x^2}}^{-1} = \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2^{n-2}+1 \end{pmatrix}$$

zeigt mit Satz 1.64, dass $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ genau dann Höhe 0 hat, wenn $d^{x^2}_{\varphi_2}(\chi) = \pm 1$ ist.

Die Charaktere μ_i aus Lemma 6.12 sind $\mathcal{F}$-stabil. Wir berechnen nun die Skalarprodukte $(\mu_i * \chi, \mu_j * \chi)_G$ für ungerade $i, j \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$. Mit $\zeta := \zeta_{2^{n-1}}$ ist unter Verwendung von Lemma 6.13

$$\begin{aligned}(\mu_i * \chi, \mu_j * \chi)_G &= 16 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) + 4 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2ki} + \zeta^{-2ki}) \left(\overline{\zeta^{2kj}} + \overline{\zeta^{-2kj}}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\quad + 4 \sum_{k=1}^{2^{n-3}} \left(\zeta^{(2k-1)i} + \zeta^{(1-2k)i}\right) \left(\overline{\zeta^{(2k-1)j}} + \overline{\zeta^{(1-2k)j}}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2^{n-3}} + S_{i,j} \cdot \frac{4}{2^{n+1}} + T_{i,j} \cdot \frac{4}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$S_{i,j} := \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} (\zeta^{2ki} + \zeta^{-2ki}) \left(\overline{\zeta^{2kj}} + \overline{\zeta^{-2kj}}\right)$$

und

$$T_{i,j} := \sum_{k=1}^{2^{n-3}} \left(\zeta^{(2k-1)i} + \zeta^{(1-2k)i}\right) \left(\overline{\zeta^{(2k-1)j}} + \overline{\zeta^{(1-2k)j}}\right)$$

gesetzt. Nun ist

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} \left(\zeta^{2k(i+j)} + \zeta^{2k(i-j)} + \zeta^{2k(-i+j)} + \zeta^{2k(-i-j)}\right) = \begin{cases} 2^{n-2} - 4 & \text{falls } i = j, \\ 2^{n-2} - 4 & \text{falls } i + j = 2^{n-2}, \\ -4 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn ist e die maximale Potenz von 2, durch die $i + j$ teilbar ist, so summiert $\sum_{k=0}^{2^{n-3}-1} \zeta^{2k(i+j)}$ (eventuell mehrfach) über alle $\frac{2^{n-1}}{2e}$-ten Einheitswurzeln und verschwindet folglich für $i+j \neq 2^{n-2}$. Gegebenenfalls ist also $\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} \zeta^{2k(i+j)} = -1$. Ist hingegen $i+j = 2^{n-2}$, so ist $\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} \zeta^{2k(i+j)} = 2^{n-3} - 1$, denn jeder Summand ist 1. Analoge Aussagen gelten für die übrigen Summen in $S_{i,j}$. Die Summe $T_{i,j}$ wertet aus zu

$$\begin{aligned}T_{i,j} &= \sum_{k=1}^{2^{n-3}} \left(\zeta^{(2k-1)(i+j)} + \zeta^{(2k-1)(i-j)} + \zeta^{(2k-1)(-i+j)} + \zeta^{(2k-1)(-i-j)}\right) \\ &= \begin{cases} 2^{n-2} & \text{falls } i = j, \\ -2^{n-2} & \text{falls } i + j = 2^{n-2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Ist hierbei wieder e die maximale Potenz von 2, durch die $i + j$ teilbar ist, so wird in der Summe $\sum_{k=1}^{2^{n-3}} \zeta^{(2k-1)(i+j)}$ (eventuell mehrfach) über alle primitiven $\frac{2^{n-1}}{e}$-ten Einheitswurzeln summiert. Ist $i + j \neq 2^{n-2}$, so verschwindet diese Summe also. Ist hingegen $i + j = 2^{n-2}$, so ist $\sum_{k=1}^{2^{n-3}} \zeta^{(2k-1)(i+j)} = -2^{n-3}$, denn jeder Summand ist gleich -1. Analoge Aussagen gelten für die übrigen drei Summanden in $T_{i,j}$. Zusammenfassend ist dann also

$$(\mu_i * \chi, \mu_j * \chi)_G = \begin{cases} 3 & \text{falls } i = j, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anwendung von Lemma 1.81 liefert mit $d^{x^2}_{\varphi_2}(\chi) = \pm 1$ und $\mu_i(x^2) = -4$

$$\begin{aligned}
\mu_1 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \delta_1\psi_1,\\
\mu_3 * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \delta_3\psi_3,\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
\mu_{2^{n-2}-1} * \chi &= \epsilon_1\chi_1 + \epsilon_2\chi_2 + \delta_{2^{n-2}-1}\psi_{2^{n-2}-1}
\end{aligned}$$

für Vorzeichen ϵ_1, ϵ_2 und δ_i sowie verschiedenen Charakteren $\chi_1, \chi_2, \psi_i \in \mathrm{Irr}(B)$ für ungerades $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$.

Da die verallgemeinerten Charaktere $\mu_i * \chi$ für ungerades $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ nach Lemma 6.12 auf der Nebenklasse $a\langle v, x, a^2\rangle$ verschwinden, ist die Bahn von $\mu_i * \chi$ unter der Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ gerade $\{\mu_i * \chi, \mu_{2^{n-2}-i} * \chi\}$, d.h. die Bahn hat die Länge 2. Wie man leicht aus obiger Gestalt der $\mu_i * \chi$ ableitet, haben dann auch die Charaktere χ_1, χ_2 und ψ_i höchstens $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$-Bahnen der Länge 2. Sie haben dann also nach Satz 1.75 nicht Höhe 0.

Mit dieser Erkenntnis analysieren wir nun erneut Zerlegungszahlen d^{x^2}. Da gerade die Charaktere ψ von Höhe 0 die Eigenschaft $d^{x^2}_{\varphi_2}(\psi) \in \{\pm 1\}$ haben, existieren zwei weitere Charaktere, die auf $d^{x^2}_{\varphi_2}$ den Wert ± 2 annehmen. Da kein Summand der $\mu_i * \chi$ Höhe 0 hat, folgt aus $d^{x^2}_{\varphi_2}(\mu_i * \chi) = \pm 4$, dass diese zwei Charaktere gerade χ_1 und χ_2 sind. Wegen der freien Operation von $\mathrm{Irr}(D/\mathfrak{foc})$ auf den Charakteren von Höhe 0, aus Paritätsgründen und wegen $x^2 \in Z(D)$ hat $d^{x^2}(\psi_i)$ für ungerades $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$ die Gestalt $(k_i, 0)$ für ein gerades $k_i \neq 0$. Die 2^{n-3} Charaktere ψ_i tragen folglich mindestens 2^{n-1} zum Skalarprodukt $(d^{x^2}_{\varphi_1}, d^{x^2}_{\varphi_1})$ bei. Gleichheit gilt hier nur, falls $d^{x^2}_{\varphi_1}(\psi_i) = \pm 2$ für alle i ist. Wegen $(d^{x^2}_{\varphi_1}, d^{x^2}_{\varphi_2}) = 8$ liefert eine kurze Fallunterscheidung, dass die Charaktere vom Grad 1 sowie χ_1 und χ_2 insgesamt wenigstens 6 zum Skalarprodukt $(d^{x^2}_{\varphi_1}, d^{x^2}_{\varphi_1})$ beitragen. Gleichheit gilt hierbei nur, falls die Einschränkung von d^{x^2} auf diese Charaktere die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$

bis auf Vorzeichen von Zeilen hat. Wegen $(d^{x^2}_{\varphi_1}, d^{x^2}_{\varphi_1}) = 2^n + 4$ und $x^2 \in Z(D)$ gibt es also maximal $2^{n-1} - 2$ weitere irreduzible Charaktere von B. Gleichheit gilt hierbei nur, falls $d^{x^2}(\psi) = (\pm 1, 0)$ für diese Charaktere ψ gilt.

Insgesamt gibt es höchstens $2^{n-1} + 2^{n-3} + 8$ Charaktere in $\mathrm{Irr}(B)$. Wegen Lemma 6.9 gilt also $k(B) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 8$ und $l(B) = 2$. Außerdem treten oben alle Gleichheitsfälle ein. Berechnung der Beitragsmatrix zu (u, b_u) liefert hieraus mit Satz 1.64 nun die Werte der $k_j(B)$ für $j \geq 0$. $\square$

Mit den gesammelten Informationen über D ergeben sich auch die Blockinvarianten im nilpotenten Fall.

Satz 6.15. *Ist B ein nilpotenter Block mit Defektgruppe D, so ist $k(B) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 6$, $l(B) = 1$, $k_0(B) = 8$, $k_1(B) = 2^{n-1} - 2$ und $k_2(B) = 2^{n-3}$.*

Beweis. Wir wenden Satz 1.46 an. Sicher ist $l(B) = 1$. Im Beweis von Lemma 6.8 wurden die Konjugationsklassen von D bestimmt. Aus der Analyse geht $k(B) = k(D) = 2^{n-1} + 2^{n-3} + 6$ hervor. Außerdem ist $D' = \langle v\rangle$ wie im Beweis von Lemma 6.10, d.h. $k_0(B) = k_1(D) = |D : D'| = 8$. Die Untergruppe $\langle a^2, v\rangle \cong C_2 \times C_{2^{n-1}}$ ist abelsch und hat Index 4. Bekanntlich haben also alle irreduziblen Charaktere von D maximal Grad 4. Da die Summe über die Quadrate der Charaktergrade von D gleich $|D|$ ist, folgen hieraus leicht die Werte für $k_1(B)$ und $k_2(B)$. $\square$

7 Ausblick

Anwendung der $*$-Konstruktion, um aus irreduziblen Charakteren von Höhe 0 weitere Charaktere eines Blocks zu konstruieren, ist eine Schlüsselidee in mehreren Abschnitten dieser Arbeit. Satz 1.72 garantiert uns dabei sogar, dass wir alle irreduziblen Charaktere von B als Summanden erhalten. Diese Tatsache kann auch zur Berechnung einer oberen Schranke für $k(B)$ genutzt werden. Dies haben wir im Beweis von Satz 5.37 sehen können, in der diese Schranke scharf war. Zusammen mit Satz 1.50 und Satz 1.51, welche gemeinsam häufig scharfe untere Schranken für $k(B)$ liefern, können wir dann in vielen Fällen $k(B)$ berechnen. Wir erhalten eine Beschreibung aller irreduziblen Charaktere von B als Summanden verschiedener verallgemeinerter Charaktere. Häufig kann mit diesem Wissen auch auf Höhen der irreduziblen Charaktere geschlossen werden. Insgesamt ergibt sich eine sehr leistungsfähige Methode zur Untersuchung von Blockinvarianten. Es ist daher naheliegend, die entwickelten Methoden auf weitere Familien von Defektgruppen anzuwenden.

Als Verallgemeinerung der Familie der 2-Gruppen mit genau drei Involutionen bietet sich hier beispielsweise die Familie der 2-Gruppen von 2-Rang 2 an. In [21, Theorem 6.2] findet sich eine Übersicht über solche Gruppen mit nichttrivialen Automorphismen ungerader Ordnung und mehr als drei Involutionen. Wie in Abschnitt 5 wäre es eventuell interessant, zunächst Blöcke mit diesen Defektgruppen zu untersuchen. In [75] und [81, Proposition 4.3] sind hierzu bereits Ergebnisse für Defektgruppen $Q_8 * C_{2^n}$ und $Q_8 * D_8$ zu finden. Für $Q_8 * D_8$ konnte allerdings nur der Fall des Trägheitsindex 5 behandelt werden.

Zur Motivation einer weiteren Familie von möglichen Defektgruppen geben wir eine Vermutung von Malle und Robinson an. Es sei p eine Primzahl. Für eine endliche p-Gruppe P definiert man dann den *sektionellen p-Rang* $s(P)$ von P als maximalen Rang von $U/\Phi(U)$ für $U \leq P$. Dies ist also die größtmögliche Elementzahl eines minimalen Erzeugendensystems einer Untergruppe von P. Gruppen vom 2-Rang 2 haben nach [52] sektionellen p-Rang von höchstens 4. In [53] stellen Malle und Robinson nun die folgende Vermutung auf.

Vermutung 7.1. *Es sei B ein p-Block mit Defektgruppe D. Dann ist*

$$l(B) \leq p^{s(D)}.$$

Da die Analyse von Blöcken B mit großen Werten $l(B)$ häufig schwieriger ist, bietet sich die Untersuchung von Defektgruppen D mit kleinem sektionellen p-Rang an. Ist $s(D) = 1$, so ist D offenbar zyklisch und die Struktur der Blöcke ist bekannt. Im Fall $s(D) = 2$ und $p = 2$ ist D nach [58, Lemma B.1] metazyklisch. Blöcke mit solchen Defektgruppen hat Sambale in [83] untersucht. Eine Klassifikation der 2-Gruppen D mit $s(D) = 3$ scheint nicht bekannt zu sein. Allerdings gibt es bereits für die Ordnung 32 solche Defektgruppen, deren Blockinvarianten noch unbekannt sind (vgl. [74, Table 13.1]).

Ein weiteres interessantes Problem, wäre die Untersuchung von Blöcken mit Defektgruppe $Q \times P$ und Fusionssystem $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}_P(P)$ für eine gegebene p-Gruppe Q und eine beliebige p-Gruppe P, wobei $\mathcal{F}'$ ein beliebiges saturiertes Fusionssystem auf Q ist. Für $Q = 1$ ist dieses Problem identisch mit der Untersuchung nilpotenter Blöcke, welche von Puig mit Satz 1.46 abgeschlossen wurde. Ist jedes saturierte Fusionssystem auf Q nilpotent, so ergibt sich die Struktur solcher Blöcke ebenfalls aus Satz 1.46. Das kleinste interessante Beispiel, welches wir in Abschnitt 4 untersucht haben, ist also das einer Kleinschen Vierergruppe Q. Für weitere Analysen bieten sich die Fälle $Q = C_2^3$, $Q = Q_8$ oder auch $Q = C_{2^n} \times C_{2^n}$ für $n \geq 2$ an. Stets wäre als erster Schritt die Bestimmung von Beiträgen $m^u_{\chi\chi}$ von B-Elementen (u, b_u) und $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ sinnvoll. Ist Q nicht elementarabelsch, so wird diese Berechnung durch den Umstand erschwert, dass zusätzlich Informationen zu Blöcken mit Defektgruppen, die bestimmte zentrale Produkte von P und Q sind, ermittelt werden müssen. Exemplarisch für das nichtnilpotente Fusionssystem $\mathcal{F}'$ auf $Q = Q_8$ würde man anschließend Resultate der folgenden Form erwarten:

Vermutung 7.2. *Es sei B ein 2-Block einer endlichen Gruppe G mit Defektgruppe $D = Q_8 \times P$ für eine beliebige 2-Gruppe P. Das Fusionssystem von B habe die Form $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Q_8}(Q_8 \rtimes C_3) \times \mathcal{F}_P(P)$.*

Dann existieren Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4 \in \mathrm{Irr}_0(B)$ *und* $\chi_5, \chi_6, \chi_7 \in \mathrm{Irr}_1(B)$*, sodass die Abbildung*

$$\mathrm{Irr}(P) \times \{\chi_1, \ldots, \chi_7\} \to \mathrm{Irr}(B), \qquad (\lambda, \chi) \mapsto \lambda * \chi$$

eine Bijektion ist.

Die Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4$ sollten sich hierbei wie in Lemma 4.5 konstruieren lassen, wobei wir

$$\lambda(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in Z(Q_8), \\ -3 & \text{sonst} \end{cases}$$

wählen. Die Charaktere χ_5, χ_6 und χ_7 sollten sich als irreduzible Summanden von $\mu * \chi$ ergeben, wobei $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ und μ der irreduzible nichtlineare Charakter von Q_8 ist. Schwierigkeiten könnte nun bereiten, dass wir $(\alpha * \chi_i, \alpha * \chi_j)_G$ für $\alpha \in \mathrm{Irr}(P)$ und $i, j \in \{5, 6, 7\}$ nicht ohne Weiteres berechnen können. Auch ist nicht klar, warum χ_5, χ_6 und χ_7 Höhe 1 haben sollten. Das wird die Berechnung der $k_i(B)$ für $i \geq 0$ erschweren. Die Berechnung von $k(B)$ hingegen sollte mit den Abschätzungen, welche sich aus Satz 1.50, Satz 1.51 und Satz 1.72 ergeben, wie im Beweis von Satz 5.37 möglich sein.

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] J. L. Alperin. „The main problem of block theory“. In: *Proceedings of the Conference on Finite Groups (Univ. Utah, Park City, Utah, 1975)*. Academic Press, New York, 1976, S. 341–356.

[2] J. L. Alperin. „Weights for finite groups“. In: *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)*. Bd. 47. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, S. 369–379.

[3] J. L. Alperin, R. Brauer und D. Gorenstein. „Finite simple groups of 2-rank two“. *Scripta Math.* 29.3-4 (1973). Collection of articles dedicated to the memory of Abraham Adrian Albert, S. 191–214.

[4] J. Alperin und M. Broué. „Local methods in block theory“. *Ann. of Math. (2)* 110.1 (1979), S. 143–157.

[5] M. Aschbacher, R. Kessar und B. Oliver. *Fusion systems in algebra and topology*. Bd. 391. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[6] J. Bertels. *Blöcke mit der 2-Sylowgruppe von* $\mathrm{PSU}(3,4)$ *als Defektgruppe*. Diplomarbeit. Jena, 2012.

[7] R. Brauer. „Number theoretical investigations on groups of finite order“. In: *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko, 1955*. Science Council of Japan, Tokyo, 1956, S. 55–62.

[8] R. Brauer. „On 2-blocks with dihedral defect groups“. In: *Symposia Mathematica, Vol. XIII (Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972)*. Academic Press, London, 1974, S. 367–393.

[9] R. Brauer. „On blocks and sections in finite groups. II“. *Amer. J. Math.* 90 (1968), S. 895–925.

[10] R. Brauer. „On the structure of blocks of characters of finite groups“. In: *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)*. Springer, Berlin, 1974, 103–130. Lecture Notes in Math., Vol. 372.

[11] R. Brauer. „On the structure of groups of finite order“. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, Vol. 1*. Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957, S. 209–217.

[12] R. Brauer. „Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. I“. *J. Algebra* 1 (1964), S. 152–167.

[13] R. Brauer. „Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. IV“. *J. Algebra* 17 (1971), S. 489–521.

[14] M. Broué. „Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées“. *Astérisque* 181-182 (1990), S. 61–92.

[15] M. Broué. „On characters of height zero“. In: *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*. Bd. 37. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, S. 393–396.

[16] M. Broué und J. B. Olsson. „Subpair multiplicities in finite groups“. *J. Reine Angew. Math.* 371 (1986), S. 125–143.

[17] M. Broué und L. Puig. „A Frobenius theorem for blocks“. *Invent. Math.* 56.2 (1980), S. 117–128.

[18] M. Broué und L. Puig. „Characters and local structure in G-algebras“. *J. Algebra* 63.2 (1980), S. 306–317.

[19] M. Cabanes und C. Picaronny. „Types of blocks with dihedral or quaternion defect groups“. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 39.1 (1992), S. 141–161.

[20] D. A. Craven. *The theory of fusion systems*. Bd. 131. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. An algebraic approach. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[21] D. A. Craven und A. Glesser. „Fusion systems on small p-groups“. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364.11 (2012), S. 5945–5967.

[22] E. C. Dade. „Blocks with cyclic defect groups“. *Ann. of Math. (2)* 84 (1966), S. 20–48.

[23] C. W. Eaton, R. Kessar, B. Külshammer und B. Sambale. „2-blocks with abelian defect groups“. *Adv. Math.* 254 (2014), S. 706–735.
[24] C. W. Eaton, B. Külshammer und B. Sambale. „2-blocks with minimal nonabelian defect groups II“. *J. Group Theory* 15.3 (2012), S. 311–321.
[25] K. Erdmann. *Blocks of tame representation type and related algebras.* Bd. 1428. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[26] Y. Fan. „Hyperfocal subalgebras of blocks and computation of characters“. *J. Algebra* 322.10 (2009), S. 3681–3692.
[27] W. Feit. *The representation theory of finite groups.* Bd. 25. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.
[28] W. Feit und J. G. Thompson. „Solvability of groups of odd order“. *Pacific J. Math.* 13 (1963), S. 775–1029.
[29] P. Fong und M. E. Harris. „On perfect isometries and isotypies in finite groups“. *Invent. Math.* 114.1 (1993), S. 139–191.
[30] M. Fujii. „On determinants of Cartan matrices of p-blocks“. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 56.8 (1980), S. 401–403.
[31] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12.* The GAP Group. 2008. URL: `http://www.gap-system.org`.
[32] G. Glauberman. „Central elements in core-free groups“. *J. Algebra* 4 (1966), S. 403–420.
[33] D. Gluck. „Rational defect groups and 2-rational characters“. *J. Group Theory* 14.3 (2011), S. 401–412.
[34] S. Hendren. „Extra special defect groups of order p^3 and exponent p“. *J. Algebra* 313.2 (2007), S. 724–760.
[35] S. Hendren. „Extra special defect groups of order p^3 and exponent p^2“. *J. Algebra* 291.2 (2005), S. 457–491.
[36] B. Huppert. *Character theory of finite groups.* Bd. 25. de Gruyter Expositions in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.
[37] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
[38] Z. Janko. „A classification of finite 2-groups with exactly three involutions“. *J. Algebra* 291.2 (2005), S. 505–533.
[39] R. Kessar. „Introducton to block theory“. In: *Group representation theory.* EPFL Press, Lausanne, 2007, S. 47–77.
[40] R. Kessar, S. Koshitani und M. Linckelmann. „Conjectures of Alperin and Broué for 2-blocks with elementary abelian defect groups of order 8“. *J. Reine Angew. Math.* 671 (2012), S. 85–130.
[41] R. Kessar und M. Linckelmann. „On stable equivalences and blocks with one simple module“. *J. Algebra* 323.6 (2010), S. 1607–1621.
[42] R. Kessar und G. Malle. „Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture“. *Ann. of Math. (2)* 178.1 (2013), S. 321–384.
[43] M. Kiyota. „On 3-blocks with an elementary abelian defect group of order 9“. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 31.1 (1984), S. 33–58.
[44] S. Koshitani und N. Kunugi. „Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9“. *J. Algebra* 248.2 (2002), S. 575–604.
[45] S. Koshitani, N. Kunugi und K. Waki. „Broué's conjecture for non-principal 3-blocks of finite groups“. *J. Pure Appl. Algebra* 173.2 (2002), S. 177–211.
[46] S. Koshitani und H. Miyachi. „Donovan conjecture and Loewy length for principal 3-blocks of finite groups with elementary abelian Sylow 3-subgroup of order 9“. *Comm. Algebra* 29.10 (2001), S. 4509–4522.
[47] B. Külshammer. „Crossed products and blocks with normal defect groups“. *Comm. Algebra* 13.1 (1985), S. 147–168.
[48] B. Külshammer. „On 2-blocks with wreathed defect groups“. *J. Algebra* 64.2 (1980), S. 529–555.
[49] B. Külshammer und T. Okuyama. „On centrally controlled blocks of finite groups“. unveröffentlicht.

[50] B. Külshammer und B. Sambale. „The 2-blocks of defect 4“. *Represent. Theory* 17 (2013), S. 226–236.

[51] M. Linckelmann. „Introduction to fusion systems“. In: *Group representation theory.* EPFL Press, Lausanne, 2007, S. 79–113.

[52] A. R. MacWilliams. „On 2-groups with no normal abelian subgroups of rank 3, and their occurrence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups“. *Trans. Amer. Math. Soc.* 150 (1970), S. 345–408.

[53] G. Malle und G. R. Robinson. *On the number of simple modules in a block of a finite group.* 2015. eprint: `arXiv:1512.05991`.

[54] M. Murai. „Block induction, normal subgroups and characters of height zero“. *Osaka J. Math.* 31.1 (1994), S. 9–25.

[55] M. Murai. „On subsections of blocks and Brauer pairs“. *Osaka J. Math.* 37.3 (2000), S. 719–733.

[56] G. Navarro. *Characters and blocks of finite groups.* Bd. 250. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[57] G. Navarro und B. Späth. „On Brauer's height zero conjecture“. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16.4 (2014), S. 695–747.

[58] B. Oliver. „Reduced fusion systems over 2-groups of sectional rank at most 4“. *Mem. Amer. Math. Soc.* 239.1131 (2016), S. v+100.

[59] J. B. Olsson. „Lower defect groups“. *Comm. Algebra* 8.3 (1980), S. 261–288.

[60] J. B. Olsson. „On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups“. *J. Algebra* 36.2 (1975), S. 212–241.

[61] J. B. Olsson. „On subpairs and modular representation theory“. *J. Algebra* 76.1 (1982), S. 261–279.

[62] W. Plesken. „Solving $XX^{\mathrm{tr}} = A$ over the integers“. *Linear Algebra Appl.* 226/228 (1995), S. 331–344.

[63] L. Puig. *Frobenius categories versus Brauer blocks.* Bd. 274. Progress in Mathematics. The Grothendieck group of the Frobenius category of a Brauer block. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[64] L. Puig. „Nilpotent blocks and their source algebras“. *Invent. Math.* 93.1 (1988), S. 77–116.

[65] L. Puig. „The hyperfocal subalgebra of a block“. *Invent. Math.* 141.2 (2000), S. 365–397.

[66] L. Puig und Y. Usami. „Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and cyclic inertial quotients of order 4“. *J. Algebra* 172.1 (1995), S. 205–213.

[67] R. Reichenbach. „Fusion systems on 2-groups with exactly three involutions“. *J. Group Theory* 18.3 (2015), S. 335–391.

[68] R. Reichenbach. *Fusionssysteme auf* 2*-Gruppen mit genau drei Involutionen.* Diplomarbeit. Jena, 2012.

[69] W. F. Reynolds. „Blocks and normal subgroups of finite groups“. *Nagoya Math. J.* 22 (1963), S. 15–32.

[70] G. R. Robinson. „On the focal defect group of a block, characters of height zero, and lower defect group multiplicities“. *J. Algebra* 320.6 (2008), S. 2624–2628.

[71] B. Sambale. 2*-Blöcke mit metazyklischen und minimal nichtabelschen Defektgruppen.* Dissertation. Jena, 2010.

[72] B. Sambale. „2-blocks with minimal nonabelian defect groups“. *J. Algebra* 337 (2011), S. 261–284.

[73] B. Sambale. „2-blocks with minimal nonabelian defect groups III“. *Pacific J. Math.* 280 (2016), S. 475–487.

[74] B. Sambale. *Blocks of finite groups and their invariants.* Bd. 2127. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2014.

[75] B. Sambale. „Blocks with central product defect group $D_{2^n} * C_{2^m}$“. *Proc. Amer. Math. Soc.* 141.12 (2013), S. 4057–4069.

[76] B. Sambale. „Blocks with defect group $D_{2^n} \times C_{2^m}$“. *J. Pure Appl. Algebra* 216.1 (2012), S. 119–125.

[77] B. Sambale. „Blocks with defect group $Q_{2^n} \times C_{2^m}$ and $SD_{2^n} \times C_{2^m}$“. *Algebr. Represent. Theory* 16.6 (2013), S. 1717–1732.

[78] B. Sambale. „Brauer's height zero conjecture for metacyclic defect groups". *Pacific J. Math.* 262.2 (2013), S. 481–507.
[79] B. Sambale. „Cartan matrices and Brauer's $k(B)$-conjecture". *J. Algebra* 331 (2011), S. 416–427.
[80] B. Sambale. „Cartan matrices and Brauer's $k(B)$-conjecture IV". noch nicht erschienen. 2016.
[81] B. Sambale. „Further evidence for conjectures in block theory". *Algebra Number Theory* 7.9 (2013), S. 2241–2273.
[82] B. Sambale. „Fusion systems on bicyclic 2-groups". noch nicht erschienen. 2016.
[83] B. Sambale. „Fusion systems on metacyclic 2-groups". *Osaka J. Math.* 49.2 (2012), S. 325–329.
[84] B. Sambale. „The Alperin-McKay conjecture for metacyclic, minimal non-abelian defect groups". *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.10 (2015), S. 4291–4304.
[85] B. Späth. „A reduction theorem for the Alperin-McKay conjecture". *J. Reine Angew. Math.* 680 (2013), S. 153–189.
[86] B. Späth. „A reduction theorem for the blockwise Alperin weight conjecture". *J. Group Theory* 16.2 (2013), S. 159–220.
[87] Y. Usami. „On p-blocks with abelian defect groups and inertial index 2 or 3. I". *J. Algebra* 119.1 (1988), S. 123–146.
[88] A. Watanabe. „Note on a p-block of a finite group with abelian defect group". *Osaka J. Math.* 26.4 (1989), S. 829–836.
[89] A. Watanabe. „Note on a p-block of a finite group with abelian defect group. II". *Osaka J. Math.* 28.1 (1991), S. 85–92.
[90] A. Watanabe. „Notes on p-blocks of characters of finite groups". *J. Algebra* 136.1 (1991), S. 109–116.
[91] A. Watanabe. „On perfect isometries for blocks with abelian defect groups and cyclic hyperfocal subgroups". *Kumamoto J. Math.* 18 (2005), S. 85–92.
[92] A. Watanabe. „p-blocks and p-regular classes in a finite group". *Kumamoto J. Sci. (Math.)* 15.1 (1982), S. 33–38.
[93] A. Watanabe. „Some studies on p-blocks with abelian defect groups". *Kumamoto J. Sci. (Math.)* 16.2 (1985), S. 49–67.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	René Reichenbach
Geburtsdatum	24. 10. 1987
Geburtsort	Weimar
E-Mail-Adresse	rene.reichenbach@uni-jena.de

Schulausbildung

1994 – 1998	Albert-Schweitzer-Grundschule, Weimar
1998 – 2006	Hoffmann-von-Fallersleben-Gymnasium, Weimar
24. 05. 2006	Abschluss: Allgemeine Hochschulreife (Note: 1,1)

Zivildienst

10/2006 – 06/2007	Zivildienst an der Freien Waldorfschule Weimar

Studium

10/2007	Beginn des Studiums an der Friedrich-Schiller-Universität Jena im Studiengang Mathematik Diplom
05. 08. 2009	Abschluss des Grundstudiums: Vordiplom (Prädikat: Sehr gut)
10/2009 – 07/2012	Hauptstudium, Spezialisierung: Algebra
04/2010 – 07/2012	Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes
23. 07. 2012	Studienabschluss: Diplom mit Auszeichnung
ab 09/2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena
17. 10. 2013	Examenspreis 2013 der Fakultät für Mathematik und Informatik

Veröffentlichungen und Vorträge

– *Fusionssysteme auf* 2*-Gruppen mit genau drei Involutionen*, Studierendenkonferenz von DMV und ÖMG 2013, Innsbruck

– *Fusionssysteme in der Gruppentheorie*, Tag der Fakultät für Mathematik und Informatik 2013, Jena

– *Invarianten von* 2*-Blöcken mit Defektgruppen mit genau drei Involutionen*, Halle-Jena Seminar Sommersemester 2014, Jena

– *Fusion systems on* 2*-groups with exactly three involutions*, erschienen im J. Group Theory 18 (2015)

– *Fusionssysteme auf* 2*-Gruppen*, Grüppchen 2015, Gießen

– *On* 2*-blocks with certain defect groups with three involutions*, Darstellungstheorietage 2015, Stuttgart

– *Blocks with defect group* $Q_{2^n} \times Q_8$, Halle-Jena Seminar Wintersemester 2015/16, Halle

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich,

- dass mir die Promotionsordnung der Fakultät bekannt ist,
- dass ich die Dissertation selbst angefertigt habe, keine Textabschnitte oder Ergebnisse eines Dritten oder eigener Prüfungsarbeiten ohne Kennzeichnung übernommen und alle von mir benutzten Hilfsmittel, persönlichen Mitteilungen und Quellen in meiner Arbeit angegeben habe,
- dass ich die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen habe und dass Dritte von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen,
- dass ich die Dissertation noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe.

Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts haben mich die folgenden Personen unterstützt: Professor Dr. Burkhard Külshammer, Dr. Benjamin Sambale

Ich habe die gleiche, eine in wesentlichen Teilen ähnliche bzw. eine andere Abhandlung bereits bei einer anderen Hochschule als Dissertation eingereicht: Nein.

Jena, den 19. 02. 2016